سازمان کتابخانه مرکزی و مرکز اسناد
آستان قدس رضوی

اسم کتاب: حل المسائل هندسه
مولف: حسین رزاقی
موضوع: هندسه زبان: فارسی
سال چاپ: ۱۳۱۷ ش محل چاپ: تهران
شماره عمومی: ۲۸۶۶۲ کتابخانه / بخش
وقفی / ~~خریدی~~: سید کاظم عصار تاریخ: بهمن ۱۳۶۴
طول: ۲۰٫۴ عرض: ۱۳٫۲ شماره صفحات: ۱۳۱ صفحه
مصور ☐ درسی ☒ گراوری ☐ افست ☐
ملاحظات: برای دورهٔ اول دبیرستانها

جزء کتب: ریاضی شماره خصوصی
شماره عمومی: ۵۴۵۶۴ شماره قبض
واقف: سید کاظم عصار تاریخ وقف: دی بهمن ۱۳۵۴
طول عرض شماره صفحات: ۱۳۱

حل المسائل هندسه

برای دورهٔ اول دبیرستانها

تألیف

حسین رزاقی لیسانسیه علوم ریاضی
دبیر ریاضیات دبیرستان دار الفنون
دارای مدال درجهٔ اول علمی

چاپ اول

حق چاپ محفوظ است

از انتشارات
کتابفروشی تمدن تهران خیابان
شاهپور ۱۳۱۷

بنام یزدان پاک

مسئله - مکمل مجموع دو زاویه $\alpha = ۲۲^\circ ۳۵'$ و $\beta = ۹۸^\circ ۴۵' ۵''$ را پیدا کنید

حل - ابتدا دو زاویه را جمع می‌کنیم

$$\alpha+\beta = ۹۸^\circ ۴۵' ۵'' + ۲۲^\circ ۳۵' = ۱۲۰^\circ ۸۰' ۵'' = ۱۲۱^\circ ۲۰' ۵''$$

و چون مجموع دو زاویه مکمل ۱۸۰° است پس باید $\beta+\alpha$ را از ۱۸۰° کسر نمود تا مکمل پیدا شود

$$۱۸۰^\circ - (\alpha+\beta) = ۱۸۰^\circ - (۱۲۱^\circ ۲۰' ۵'')$$

$$(۱۷۹^\circ ۵۹' ۶۰'') - (۱۲۱^\circ ۲۰' ۵'') = ۵۸^\circ ۳۹' ۵۵''$$

مسئله - مجموع دو زاویه α و β مساویست با $۸^\circ ۴۷' ۲۳''$ و تفاضل آندو $۱^\circ ۱' ۱''$ میباشد آن دو زاویه را حساب کنید

حل - اگر تفاضل را از مجموع کم کنیم دو برابر زاویه کوچک بدست میآید

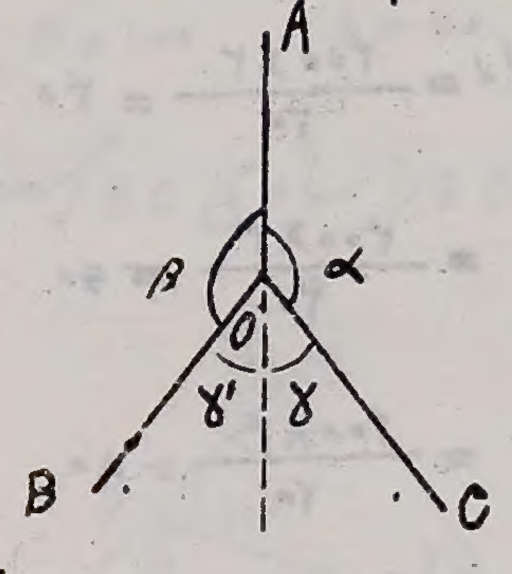
$$۸^\circ ۴۷' ۲۳'' - ۱^\circ ۱' ۱'' = ۷^\circ ۴۶' ۲۲''$$

$\alpha = ۷^\circ ۴۶' ۲۲'' : ۲ = ۳٫۵^\circ ۲۳' ۱۱''$ زاویه کوچک و چون ۵٫۰ درجه برابر $۳۰'$ است پس $\alpha = ۳^\circ ۵۳' ۱۱''$ و زاویه بزرگتر یعنی که برابر است با $\beta = ۳^\circ ۵۳' ۱۱'' + ۱^\circ ۱' ۱''$ پس $\beta = ۴^\circ ۵۴' ۱۲''$ خواهد بود

مسئله - زاویه $\alpha = ۷۲^\circ$ است مطلوبست محاسبه متمم آن بحسب درجه و گراد

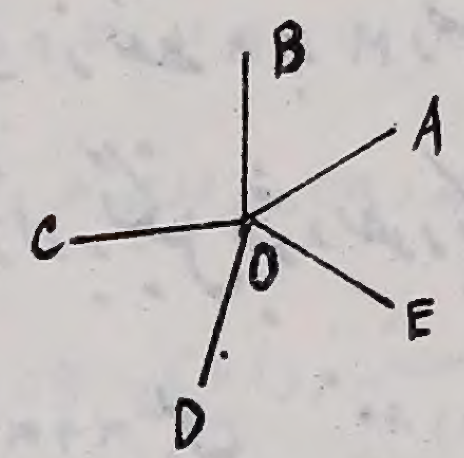
حل - دو زاویه متمم مجموعشان ۹۰ درجه است پس متمم α عبارتست از $\beta = ۹۰^\circ - ۷۲^\circ = ۱۸^\circ$ اما چون ۹۰ درجه برابر ۱۰۰ گراد است پس ۱۸ درجه مساوی ۲۰ گراد خواهد شد

مسئله - ۳ قطعه خط OA و OB و OC در حول نقطه O سه زاویه مساوی ایجاد می‌کند ثابت کنید که اگر هرکدام از این خطوط را امتداد دهیم منصف الزاویه دو قطعه خط دیگر خواهد بود مثلاً امتداد AO منصف الزاویه BOC میباشد



حل - زاویه α و γ مجانبند پس مجموعشان ۱۸۰° میباشد و همچنین $\beta + \gamma' = ۱۸۰^\circ$ اما چون $\alpha = \beta$ است پس لازم میآید $\gamma' = \gamma$ باشد

مسئله - پنج قطعه در نقطه O تشکیل ۵ زاویه متناسب با اعداد ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ میدهند مطلوبست محاسبه هریک از این زوایا اولاً بحسب درجه ثانیاً بحسب گراد



حل - چون زاویه حول نقطه O چهار قائمه یعنی ۳۶۰ درجه یا ۴۰۰ گراد میباشد پس باید ۳۶۰ درجه و همچنین ۴۰۰ گراد را به نسبت اعداد ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ تقسیم نمود که چنین خواهیم داشت

$۲+۳+۴+۵+۶ = ۲۰$ = مجموع نسبت و $\frac{۳۶۰ \times ۲}{۲۰} = ۳۶$ = زاویه

AOE بحسب درجه و

زاویه AOB $= \frac{360\times3}{20} = 54$ بحسب درجه

زاویه BOC $= \frac{360\times4}{20} = 72$ بحسب درجه

« « COD زاویه $= \frac{360\times5}{20} = 90$

« « DOE زاویه $= \frac{360\times6}{20} = 108$

ثانیاً بحسب گراد مقدار هریک از زوایا چنین میشود

زاویه AOE $= \frac{400\times2}{20} = 40$ بحسب گراد

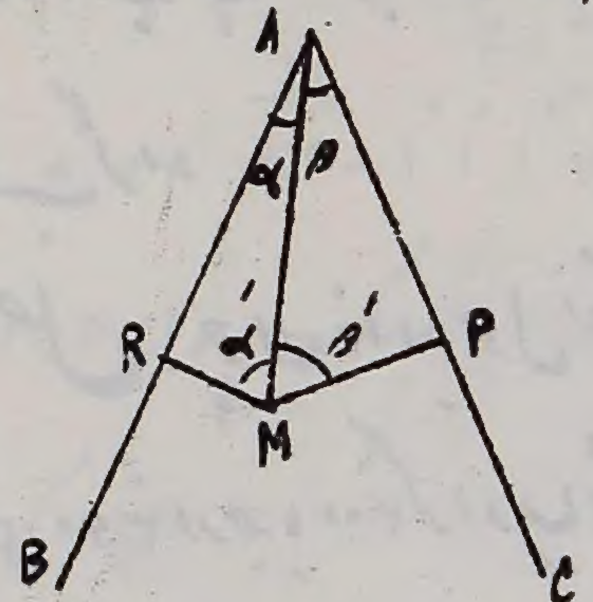
« « AOB « $= \frac{400\times3}{20} = 60$

« « BOC « $= \frac{400\times4}{20} = 80$

« « COD « $= \frac{400\times5}{20} = 100$

« « DOE « $= \frac{400\times6}{20} = 120$

مسئله - زاویه $ABC = 39$ درجه مفروض است از نقطهٔ M داخل این زاویه دو خط MP و MR را بر اضلاع زاویه عمود می‌کنیم مطلوبست محاسبهٔ زاویه RMP

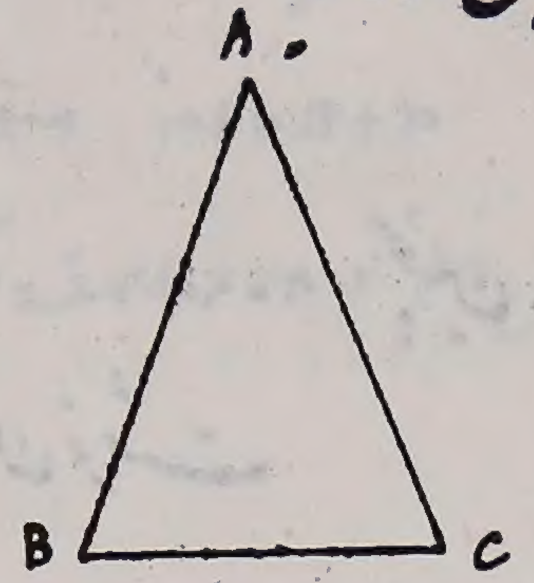


حل - از نقطه A بر M وصل می‌کنیم دو مثلث قائم الزاویه تشکیل میشود بطوریکه $\beta+\beta'=90^\circ$ و $\alpha+\alpha'=90^\circ$ پس $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'=180^\circ$ اما چون $\alpha+\beta=39^\circ$ میباشد پس

$RMP = \beta'+\alpha' = 180-39 = 141^\circ$

مسئله - مثلثی متساوی الساقین که زاویهٔ رأس آن ۳۲ درجه است

مفروض میباشد مطلوبست محاسبهٔ زوایای مجاور بقاعدهٔ آن

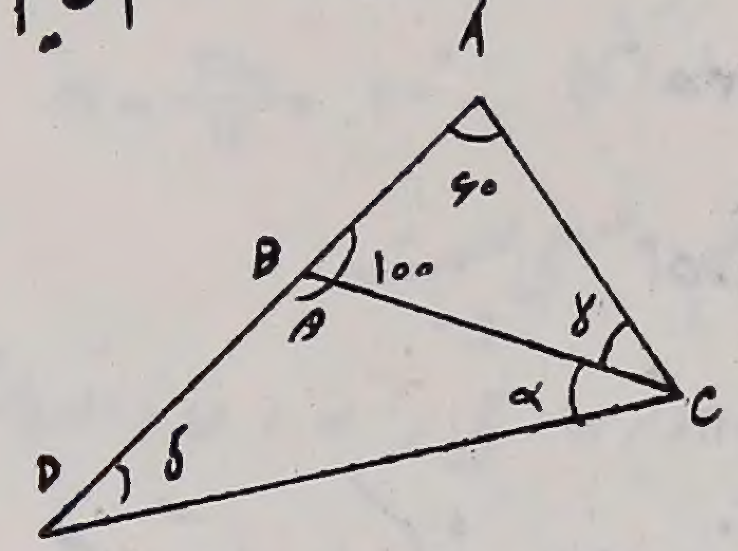


حل - چون در مثلث متساوی الساقین دو زاویه B و C مساوی هستند پس

$\hat{B}+\hat{C} = 180^\circ - 32 = 148^\circ$

و از آنجا $\hat{B}=\hat{C}=148^\circ \div 2 = 74^\circ$

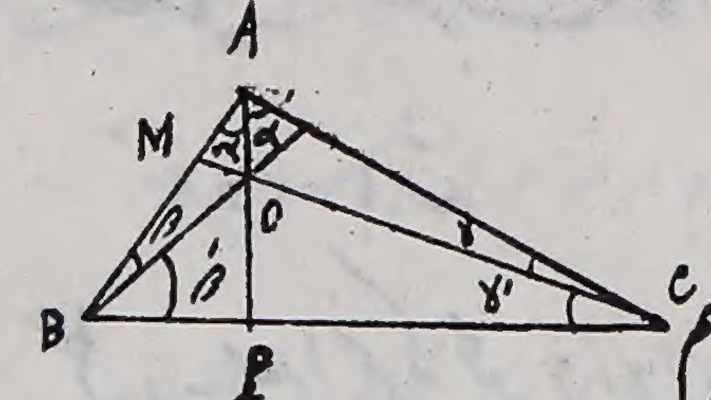
مسئله - مثلث ABC در صورتیکه زاویه $A=60^\circ$ و $B=100^\circ$ میباشد مفروض است از نقطهٔ B در امتداد AB خط BD را مساوی BC رسم می‌کنیم مطلوبست محاسبهٔ زوایای مثلث BDC



حل - چون مثلث DBC متساوی الساقین است پس $\hat{\alpha}=\hat{\delta}$ میباشد و اما زاویه $\gamma=180-(100+60)$ و $\gamma=20^\circ$ و زاویهٔ β که خارجهٔ مثلث ABC میباشد برابر است با $\beta=60+20=80^\circ$ پس

$\delta=\alpha=\frac{180-\beta}{2}=\frac{180-80}{2}=50$ پس $\beta=80^\circ$ و $\alpha=50^\circ$ و $\delta=50^\circ$

مسئله - مثلث ABC بزاویه $B=75$ درجه و $C=35$ درجه مفروض است مطلوبست محاسبهٔ زاویه بین هر دو ارتفاع یعنی محاسبهٔ زوایای AOB و AOC و BOC



حل - اولاً زاویه A را محاسبه می‌کنیم

$A = 180-(B+C) = 180-110 = 70^\circ$

اما در مثلث قائم الزاویه APB

میتوان نوشت $\alpha+\beta=۹۰^\circ$

یعنی $\alpha=۹۰-۷۵=۱۵^\circ$ و همچنین $\alpha'+c=۹۰^\circ$ و $\alpha'=۹۰-۳۵$ ، $\alpha'=۵۵$ و

بترتیب میتوان نوشت $\gamma=۳۵-۲۰=۱۵^\circ$ و

$\beta=۹۰-۷۰=۲۰^\circ$ و $\beta'=۷۵-۲۰=۵۵^\circ$ و $\gamma'=۹۰-۷۰=۲۰^\circ$ و

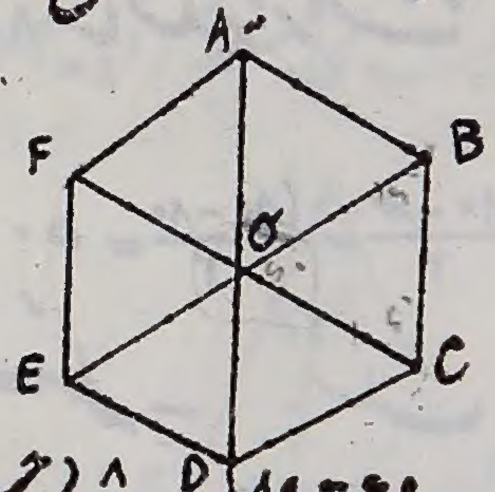
حال در مثلث OAB میتوان نوشت

$$\hat{AOB}=۱۸۰^\circ-(\alpha+\beta)=۱۸۰^\circ-۳۵^\circ=۱۴۵^\circ$$

$$\hat{AOC}=۱۸۰^\circ-(\alpha'+\gamma)=۱۸۰^\circ-۷۵^\circ=۱۰۵^\circ$$

$$\hat{BOC}=۱۸۰^\circ-(\beta'+\gamma')=۱۸۰^\circ-۷۰^\circ=۱۱۰^\circ$$

مسئله - کثیر الاضلاع منتظم ۶ ضلعی مفروض مطلوبست اولاً مقدار یکی از زوایای مرکزی مقابل یک ضلع ثانیاً یکی از زوایای این کثیر الاضلاع ثالثاً زاویهٔ خارجهٔ آن



حل - یکی از زوایای مرکزی برابر است با $\frac{۳۶۰}{۶}=۶۰$ درجه (چرا؟) پس زاویه $\hat{A}=\frac{۱۸۰-۶۰}{۲}=\frac{۱۲۰}{۲}=۶۰$ (چرا؟)

مسئله - مطلوبست نمرهٔ اضلاع کثیر الاضلاعی که مجموع زوایای داخلی آن ۴۶۸۰° باشد

حل - میدانیم که مجموع زوایای داخلی کثیر الاضلاع n ضلعی برابر است

با $۲n-۴$ قائمه پس $\frac{۴۶۸۰}{۹۰}=۲n-۴$

یعنی $۵۲=۲n-۴$ و $۲n=۵۶$ و $n=۲۸$

مسئله - زاویه خارجی یک کثیر الاضلاع منتظم ۱۲ درجه است تعداد اضلاع این کثیر الاضلاع را معلوم کنید

حل - چون کثیر الاضلاع منتظم است پس تمام زوایای خارجی با یکدیگر مساوی میباشند (چرا؟) و چون مجموع این زوایا نیز چهار قائمه است و عدهٔ زوایای خارجی نیز بتعداد اضلاع است پس $۱۲n=۳۶۰^\circ$ و از آنجا $n=\frac{۳۶۰}{۱۲}=۳۰^\circ$

مسئله - زاویه خارجی یک کثیر الاضلاع منتظم ۹ ضلعی چیست

حل - میدانیم که در کثیر الاضلاع منتظم اگر زاویه خارجی را α و عدهٔ اضلاع را n فرض کنیم چنین خواهیم داشت $\alpha\times n=۳۶۰^\circ$ و یا $\alpha\times ۹=۳۶۰^\circ$ و از آنجا $\alpha=\frac{۳۶۰^\circ}{۹}=۴۰^\circ$

«حل تمرینات ذیل بعهدهٔ دانش آموز است»

مسئله - مطلوبست عده اضلاع کثیر الاضلاع منتظمی که زاویهٔ داخلی آن ۱۵۶° میباشد

مسئله - در مثلث ABC زوایه $A=۳۹^\circ$ و $C=۴۰^\circ$ میباشد مطلوبست تعیین زوایا و اضلاع AC و BC با ارتفاع مرسوم از راس C

مسئله - در مثلث ABC زاویه $A=۶۰^\circ$ و زاویه $B=۱۰۰^\circ$ مطلوبست ۳

زاویه خارجی مثلث

مسئله ـ در مثلث قائم‌الزاویه ABC زوایای حادهٔ B و C بترتیب عبارتند از B=۲۴° و C = ۶۶° مطلوبست محاسبهٔ زاویه مابین ارتفاع و منصف الزاویهٔ وارد از رأس A

مسئله ـ مطلوبست محاسبه عده اضلاع کثیرالاضلاع منتظمی که زاویه داخلی آن ۱۶۰ درجه باشد

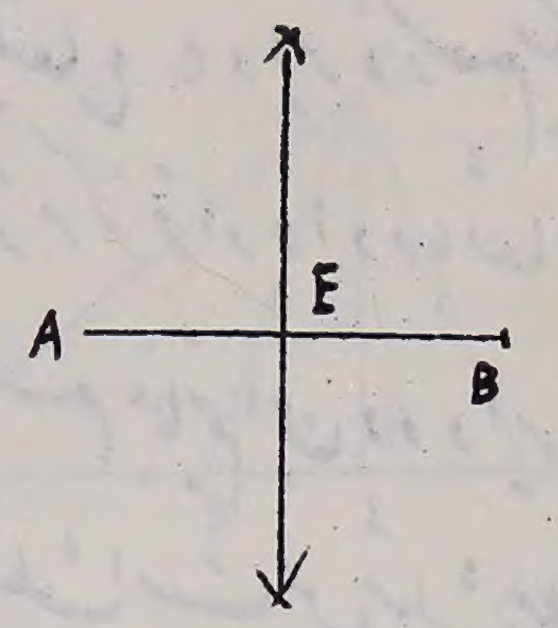
مسئله ـ زاویهٔ رأس A از مثلثی ۸۲ درجه است مطلوبست محاسبهٔ زاویهٔ حادث بین دو منصف الزاویهٔ داخلی B و C

مسئله ـ کثیرالاضلاع منتظمی ۳۶ ضلع دارد زاویهٔ داخلی آن چقدر است

«ترسیمات»

مسئله ـ قطعه خط AB را بدو قسمت تساوی تقسیم کنید

حل ـ کافیست مکان هندسی نقاطی را پیدا کنیم که از A و B بیک فاصله باشند برای اینکار نقطه A را مرکز قرار داده بشعاع بزرگتر از نصف AB دایره رسم می‌کنیم و با همان شعاع بمرکز B نیز دایره دیگری رسم مینمائیم خط واصل بین نقاط تقاطع دو دایره خط مکان هندسی مطلوبست (چرا؟) که عمود منصف AB میباشد این خط در نقطهٔ E خط AB را بدو قسمت تساوی تقسیم مینماید

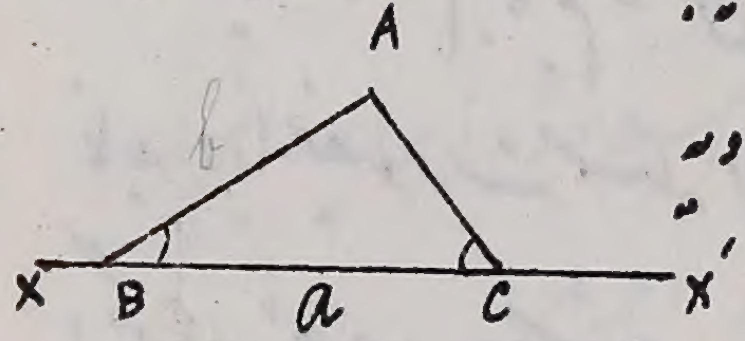


مسئله ـ از نقطه A در روی x x' عمودی بر این خط اخراج کنید

حل ـ ابتدا در روی خط x x' نقاط C و D را بفاصله مساوی از A جدا می‌کنیم بعد مانند مسئله بالا خط عمود منصف CD را که از A میگذرد رسم میکنیم جواب مسئله است

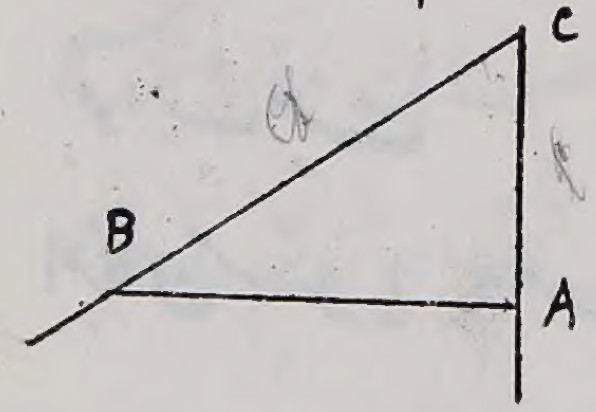
مسئله ـ مثلثی بسازید که یک ضلع آن مقابل رأس A برابر a و زاویهٔ B و C معلوم هستند

حل ـ در روی خط x x' ابتدا طول BC=a را نقل می‌کنیم بعد از نقطه B زاویه باندازهٔ B و از نقطه C زاویه باندازهٔ C میسازیم این دو خط در نقطه A یکدیگر را قطع می‌کنند مثلث مطلوب ABC میباشد



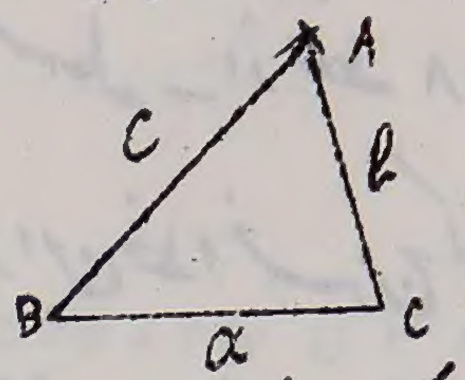
مسئله ـ مثلثی بسازید که دو ضلع a و b و زاویه بین آنها C معلوم است

حل ـ ابتدا زاویه C را میسازیم بعد از اضلاع این زاویه طولهای a=CB و b=AC جدا کرده این دو نقطه را بهم وصل می‌کنیم مثلث بدست میآید ABC بدست میآید



مسئله ـ اضلاع مثلثی a و b و c معلومند مثلث را رسم کنید

حل - ابتدا خطی $a = BC$ رسم می‌کنیم بعد نقطه B را مرکز قرار داده



بشعاع c دایره رسم میکنیم و همچنین نقطه C را
نیز مرکز قرار داده باشعاعی برابر b دایرهٔ دیگر
رسم مینمائیم این دو دایره یکدیگر را در نقطه A قطع می‌کنند که رأس سوم
مثلث است پس مثلث مطلوب ABC بدست می‌آید

امکان مسئله - البته رسم مثلث بالا وقتی ممکن است که ضلع بزرگتر از مجموع
دو ضلع دیگر کوچکتر باشد یعنی $a < b + c$

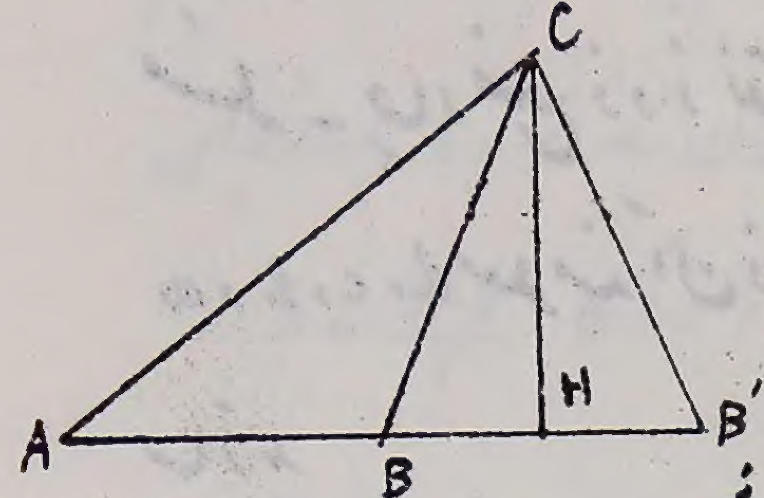
مسئله - از مثلثی $\hat{A}$ و b و a معلومند مثلث را رسم کنید

حل - ابتدا زاویه A را میسازیم و در روی یکی از اضلاع این زاویه طول
$AC = b$ را نقل می‌کنیم بعد نقطهٔ C را مرکز قرار داده بشعاعی برابر a
دایره رسم مینمائیم که ممکن است ضلع دیگر زاویه A را در نقطه B' و B'' قطع
نماید درانصورت مسئله دارای دو جواب است یکی مثلث ACB' و
دیگری ACB'' میباشد

اگر دایره مرسوم بمرکز C و شعاع a باضلع دیگر زاویه مماس شد دراین
صورت مسئله دارای یک جواب و اگر آنرا قطع نکرد مسئله دارای
جواب نیست

امکان مسئله ! مسئله دارای دو جواب است وقتی a بزرگتر از ارتفاع

کتابخانه آستان قدس رضوی



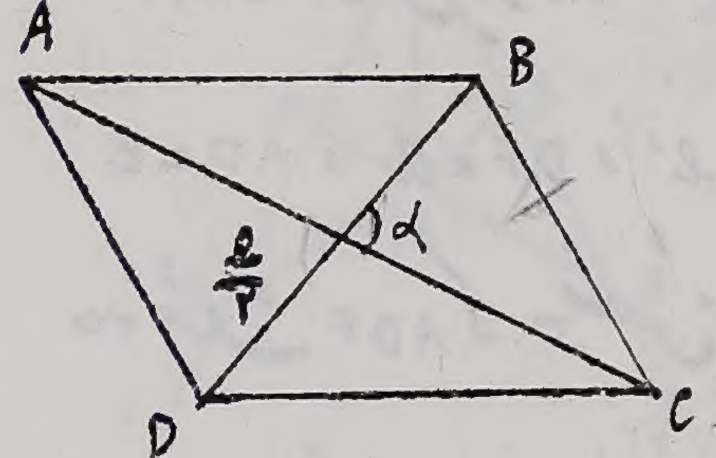
CH باشد

مسئله دارای یک جواب است وقتی که
$CH = a$ باشد

- مسئله دارای جواب نیست وقتی $CH > a$ باشد

مسئله - دو قطر متوازی الاضلاعی a و b و زاویه بین دو قطر نیز α معلوم است
متوازی الاضلاعی بسازید

حل - ابتدا دو خط چنان رسم میکنیم که یکدیگر را بزاویه α قطع کنند بعد از



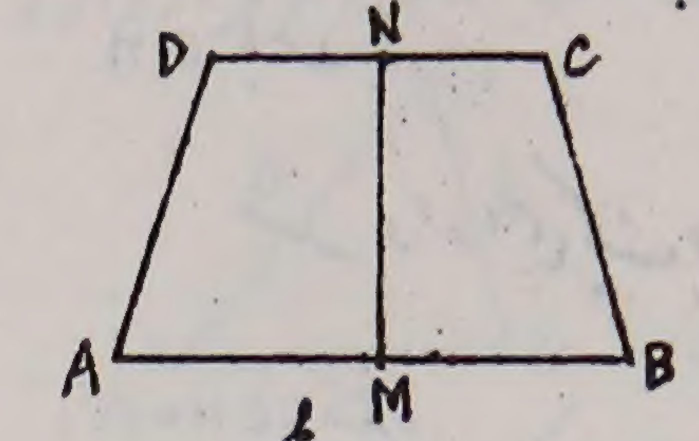
طرفین نقطه O در روی یکی از آن خطوط دو
طول مساوی $\frac{a}{2}$ و از طرفین نقطه O در روی
خط دیگر دو طول برابر $\frac{b}{2}$ را جدا می‌کنیم
از وصل نقاط جدا شده یک متوازی الاضلاع رسم میشود زیرا میدانیم که در
متوازی الاضلاع دو قطر منصف یکدیگر میباشند (چرا؟)

مسئله - ذوزنقه متساوی الساقین که دو قاعده‌اش b و b' و ارتفاع
آن h معلوم است بسازید

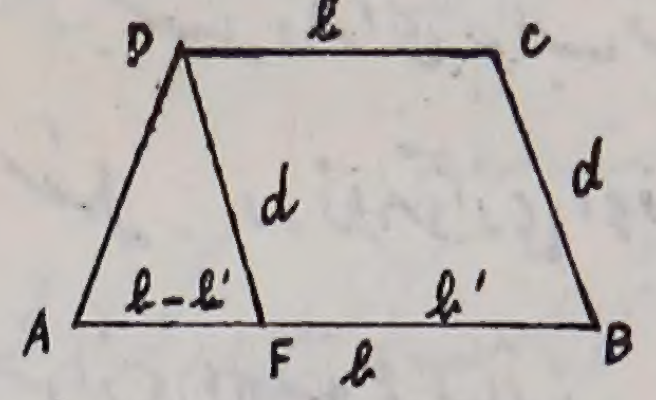
حل - ابتدا خط $AB = b$ را رسم میکنیم و عمود منصف این خط را نیز رسم
نموده طول $MN = h$ را در روی این عمود منصف نقل می‌نمائیم و از طرفین
نقطه N دو طول $ND = NC = \frac{b'}{2}$ را جدا نموده از وصل نقاط D و C به A

کتابخانه آستان قدس رضوی

و B ذوذنقه مطلوب بدست میآید (چرا؟)

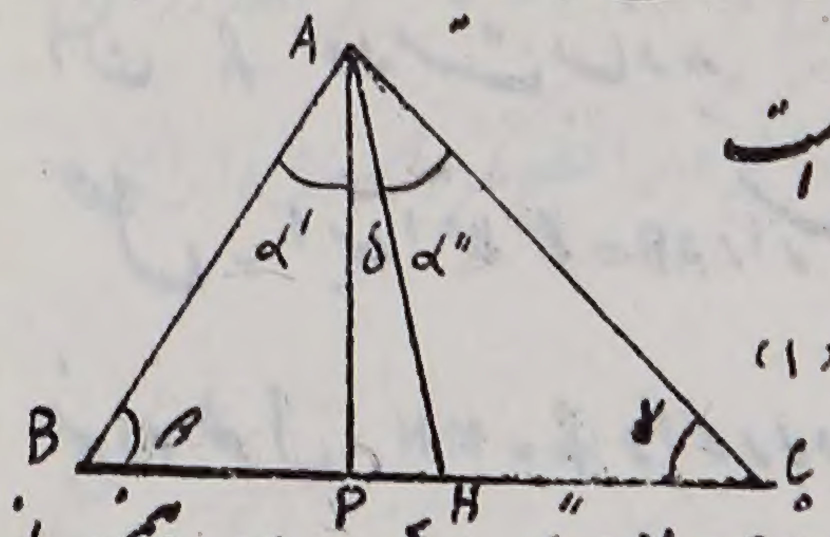


مسئله ـ چهارضلع ذوذنقه بترتیب l و l' و c و d معلومند آن ذوذنقه را بسازید



حل ـ اگر ABCD ذوذنقه مطلوب باشد ملاحظه می کنیم که هرگاه از نقطه D خطی بموازات CB مانند DF رسم کنیم متوازی الاضلاع DCFB و شلث DAF حاصل میشود که اضلاع شلث ADF بترتیب عبارتند از $AD=c$ و $DF=d$ و $AF=l-l'$ پس میتوان بسهولت مطابق مسئله شماره ۲۵ شلث ADF که ۳ ضلعش معلوم است رسم کرده بعد خط AF را باندازه $FB=l'$ امتداد داده خط $DC=l'$ را نیز بموازات آن رسم نموده از وصل نقاط B به C ذوذنقه مطلوب بدست میآید

مسئله ـ از شلث ABC زاویه $\beta=70^\circ$ و زاویه $\gamma=20^\circ$ معلوم است مطلوبست محاسبه زاویه مابین ارتفاع و منصف الزاویه راس A



حل ـ چون خط AH منصف الزاویه است پس $\hat{\delta}+\hat{\alpha}'=\hat{\alpha}''$ ویا $\delta=\alpha''-\alpha'$ (۱)

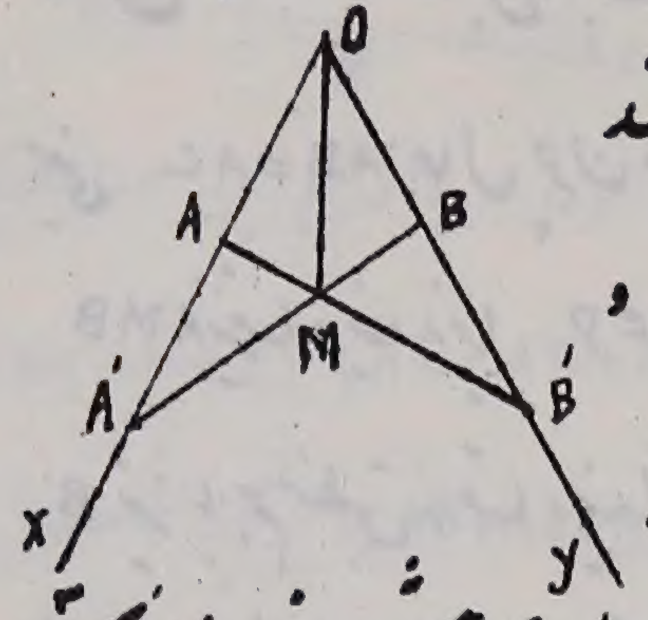
واز شلث قائم الزاویه APC نتیجه میشود $90^\circ=\gamma+\alpha''+\delta$ (۲) وهمچنین از

شلث قائم الزاویه APB نتیجه میشود $90^\circ=\beta+\alpha'$ (۳) اگر رابطه (۳) را از (۲) کسر نمائیم چنین میشود $\delta+\alpha''+\gamma-\alpha'-\beta=0$ وچون $\alpha''-\alpha'=\delta$ میباشد پس

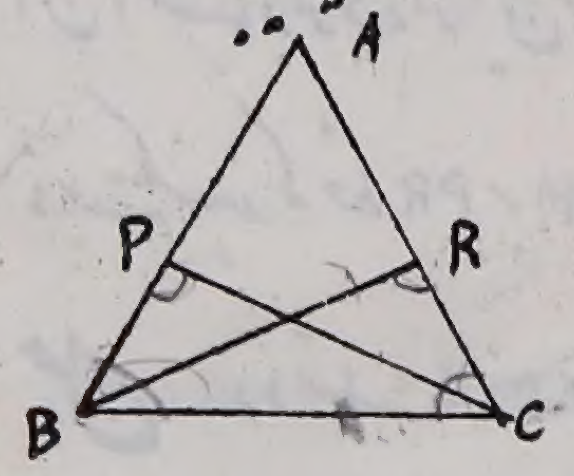
$$\delta+\delta+\gamma-\beta=0 \quad \text{یعنی} \quad 2\delta=\beta-\gamma \quad \text{واز آنجا} \quad \delta=\frac{\beta-\gamma}{2}$$

پس مقدار $\delta=\frac{70-20}{2}=25$ درجه

مسئله ـ زاویه xOy مفروض است درروی Ox دو طول OA و OA' را بترتیب مساوی OB و OB' که درروی Oy برده شده است جدا می کنیم ثابت کنید که اگر از O به محل تلاقی AB' و A'B وصل شود منصف الزاویه خواهد بود



حل ـ دو شلث OAB' و OBA' مساوی هستند زیرا دو ضلع $OA=OB$ و $OB'=OA'$ و زاویه بینهامشترک میباشند پس نتیجه میشود زاویه $\hat{A}'=\hat{B}'$ و دو شلث MBB' و MAA' نیز مساوی هستند زیرا دو سه زاویه مساوی بوده و ضلع $AA'=BB'$ پس $MA=MB$ حال دو شلث OMB و OMA نیز مساوی میباشند زیرا درسه ضلع مساوی هستند پس لازم میآید که زوایای آنها نیز متساوی باشد لذا OM منصف الزاویه میباشد

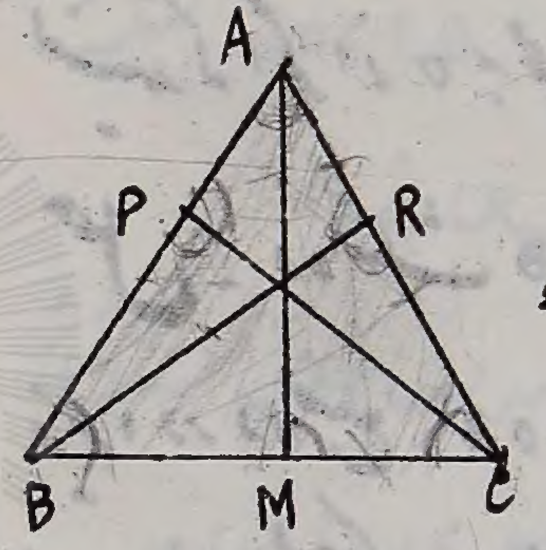


مسئله ـ هرگاه ازشلثی دو ارتفاع متساوی باشد آن شلث متساوی الساقین است

حل ـ دو شلث قائم الزاویه CPB و BRC باهم متساویند زیرا $BR=CP$

بنا بفرض میباشد و ضلع BC در هر دو مشترک است و ضلع و زاویهٔ متقابل بضلع اعظم از مثلث CPB با دو ضلع و زاویهٔ متقابل بضلع اعظم از مثلث BRC متساویند لذا این دو مثلث متساوی میشوند و از آنجا نتیجه میشود BP=RC پس زوایای متقابل باضلاع مساوی نیز مساویند یعنی $\hat{B}=\hat{C}$ پس لازم میآید که مثلث ABC متساوی الساقین باشد

مسئله ـ هرگاه در مثلثی ۳ ارتفاع متساوی باشند مثلث متساوی الاضلاع است

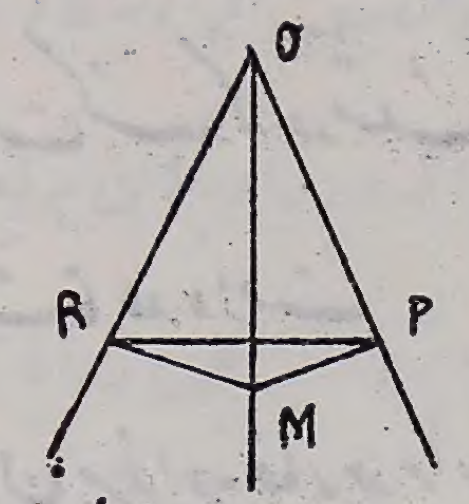


حل ـ در مسئله قبل ثابت شد که زاویهٔ $\hat{B}=\hat{C}$ است یعنی AB=AC حال چون دو مثلث قائم الزاویه CPB و AMB نیز مساویند زیرا AM=CP بنا بفرض و در زاویهٔ B نیز باهم منطبق و متساویند پس در زاویهٔ سوم نیز مساوی شده لذا دو مثلث متساوی میشوند و از تساوی آنها لازم میآید که AB=BC پس مثلث متساوی الاضلاعست زیرا AB=BC=AC میباشد

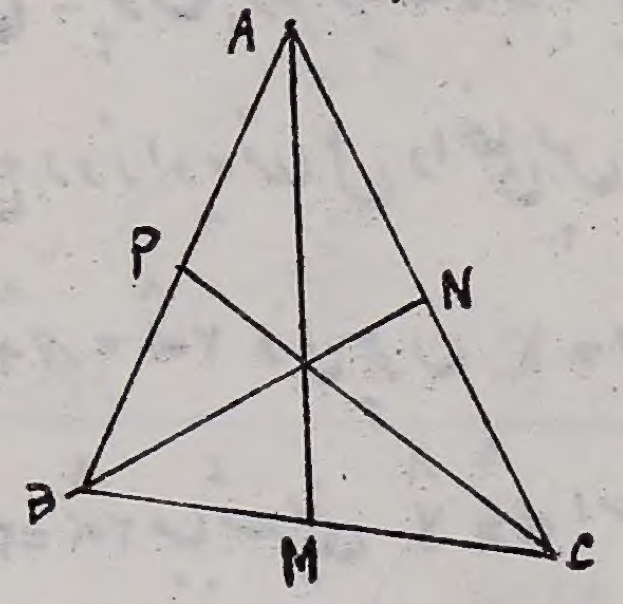
مسئله ـ زاویهٔ AOB مفروض است نقطه مانند M از روی منصف الزاویهٔ آن اختیار کرده و از این نقطه دو عمود MP و MR را بر اضلاع آن فرود میآوریم ثابت کنید که خط PR بر OM عمود است

حل ـ دو مثلث OMP و OMR متساویند زیرا OM در هر دو مشترک و MR=MP است و زاویهٔ P و R نیز قائمه بوده و در زاویهٔ راسش نیز متساویند

و از تساوی این دو مثلث نتیجه میشود که OR=OP پس مثلث OPR متساوی الساقین است و منصف الزاویه بر قاعده عمود است



مسئله ـ اگر محیط مثلث ABC مساوی $2p$ باشد ثابت کنید که مجموع ۳ میانه کوچکتر است از $3p$ و بزرگتر است از p



حل ـ در هر مثلث هر ضلع کوچکتر است از مجموع دو ضلع دیگر پس $BN < AB + AN$ و همچنین $AM < AC + CM$ و $CP < CB + BP$ و یا از جمع این ۳ رابطه نتیجه میشود

$$BN + AM + CP < AB + AN + AC + CM + CB + BP$$

حال اگر طرف ثانی را ملاحظه کنیم معلوم میشود که $AB+AC+BC$ برابر محیط مثلث یعنی $2p$ و $AN+CM+BP$ نصف محیط یعنی p است پس $PN + AM + CP < 3p$

و میتوانیم چنین نیز بنویسیم

$$AM > AC - MC$$

$$BN > AB - AN$$

$$CP > BC - BP$$

و یا از جمع این ۳ رابطه بدست میآید

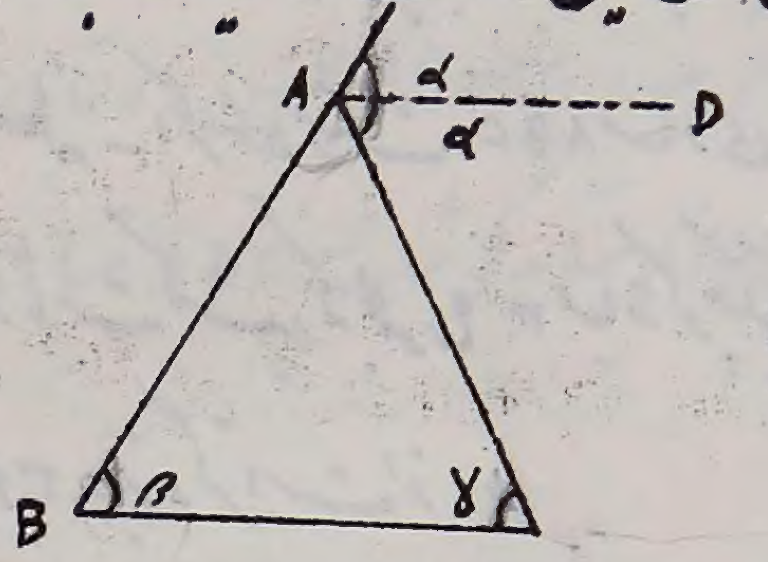
$$AM + BN + CP > AC + AB + BC - (MC + AN + BP)$$

و یا

$$AM + BN + CP > 2p - p$$

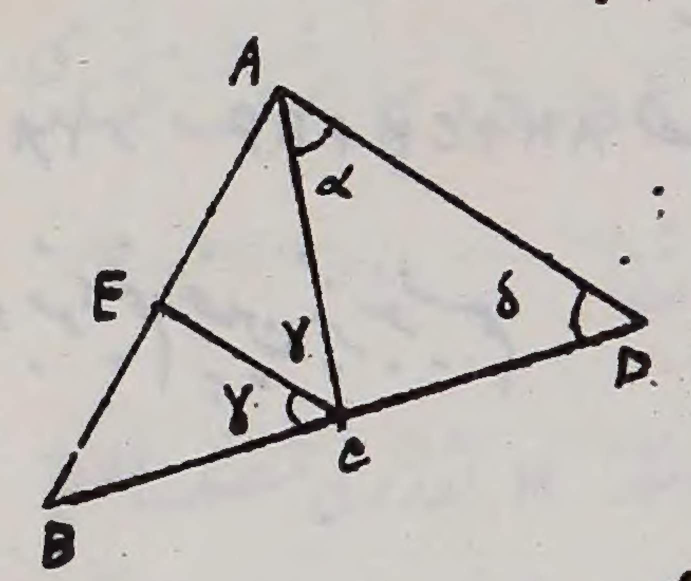
پس $AM + BN + CI$ ...

مسئله ـ ثابت کنید که در مثلث متساوی الساقین منصف الزاویه خارجه رأس A بموازات قاعده است



حل ـ چون هر زاویه خارجه برابر است با مجموع دو زاویه متقابل داخلی پس $\hat{\gamma}+\hat{\beta}=2\hat{\alpha}$ ولی چون $\gamma=\beta$ است زیرا مثلث متساوی الساقین است پس $2\hat{\gamma}=2\hat{\alpha}$ میباشد یعنی $\hat{\gamma}=\hat{\alpha}$ است و از اینجا نتیجه میشود که باید AD موازی BC باشد تا دو زاویه α و γ بتواند مساوی باشد

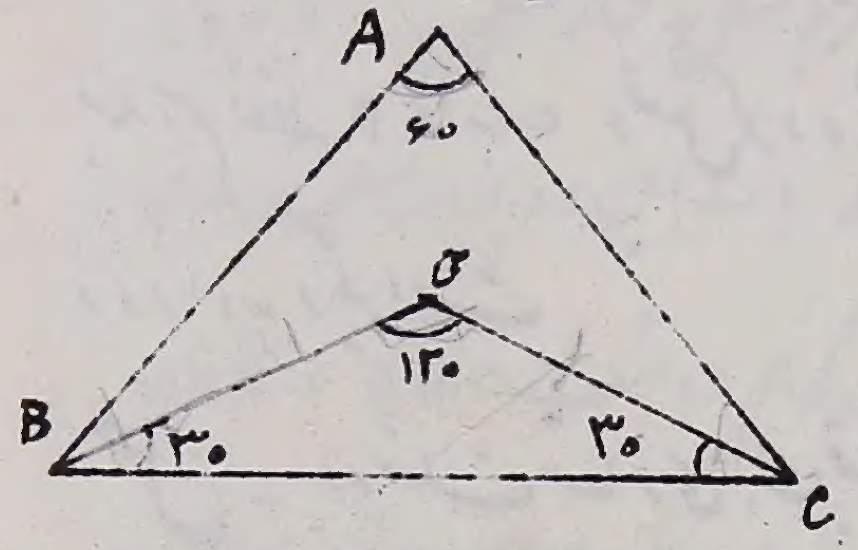
مسئله ـ مثلث ABC مفروض است قاعدهٔ BC را باندازه AC امتداد میدهیم تا نقطه D ثابت کنید که منصف الزاویه رأس C بموازات خط AD است



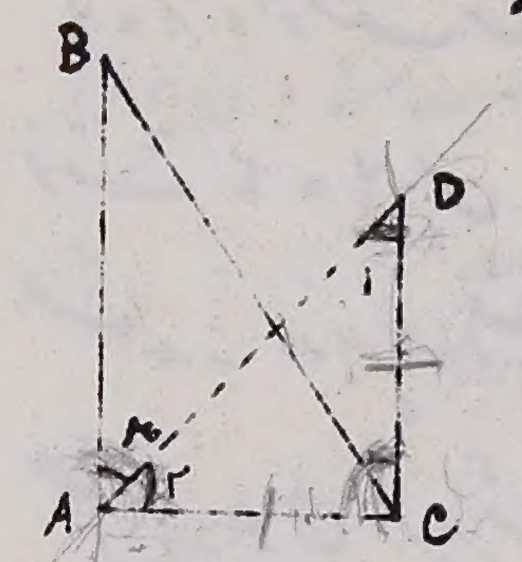
حل ـ زاویه خارجی C را مساوی 2γ فرض میکنیم پس $2\gamma=\alpha+\delta$ اما چون مثلث ACD متساوی الساقین است پس $\delta=\alpha$ پس میتوان نوشت $2\gamma=2\alpha$ یعنی $\alpha=\gamma$ و از اینجا نتیجه میشود که باید AD و EC موازی و AC قاطع باشد

مسئله ـ ثابت کنید که در مثلث متساوی الاضلاع زاویه بین دو منصف الزاویه دو برابر یکی از زوایای مثلث است

حل ـ میدانیم که در مثلث متساوی الاضلاع هر یک از زوایای مثلث ۶۰ درجه میباشد پس باید ثابت کرد که زاویه بین دو منصف الزاویه B و C ۱۲۰ درجه است لذا ملاحظه میکنیم مثلث BOC راکه دو زاویه آن هر یک ۳۰ درجه است پس لازم میآید که زاویه سوم آن ۱۲۰ درجه باشد زیرا مجموع زوایای هر مثلث دو قائمه است ۱۸۰ - ۲ × ۳۰ = ۱۲۰

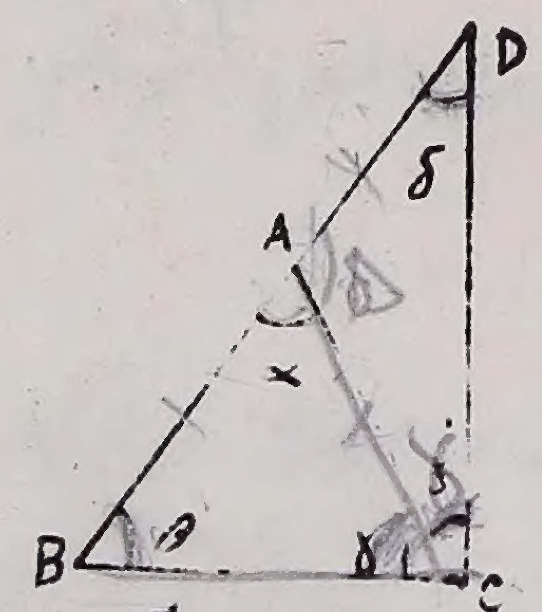


مسئله ـ در مثلث قائم الزاویه CD را عمود بر AC و باندازهٔ آن رسم میکنیم ثابت کنید که خط AD منصف الزاویه رأس A میباشد



حل ـ چون مثلث ACD قائم الزاویه و متساوی الساقین است پس هر یک از زوایای $\hat{1}$ و $\hat{2}$ برابر ۴۵ درجه اند و چون زاویه A مساوی ۹۰ درجه است و $\hat{2}$ برابر ۴۵ درجه پس زاویه $\hat{3}=45^\circ$ میباشد

مسئله ـ مثلث متساوی الساقین ABC مفروض است AD را باندازهٔ AC رسم میکنیم ثابت کنید که خط DC بر BC عمود است



حل ـ در مثلث متساوی الساقین مفروض ABC نتیجه میشود که $\hat{\gamma}=\hat{\beta}$ و از مثلث متساوی الساقین CAD لازم میآید $\hat{\delta}=\hat{\gamma}$

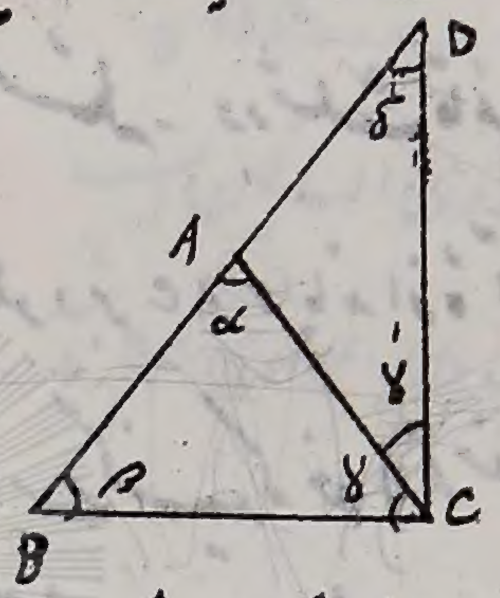
۲۸۶۶۲

ولی از طرفی مجموع زوایای مثلث DBC برابر ۱۸۰ درجه است $\beta+\gamma+\gamma'+\delta=180^\circ$

و یا میتوان چنین نوشت $2\gamma+2\gamma'=180$ و یا $\gamma+\gamma'=90$ درجه

پس زاویه C قائمه یعنی DC بر BC عمود است

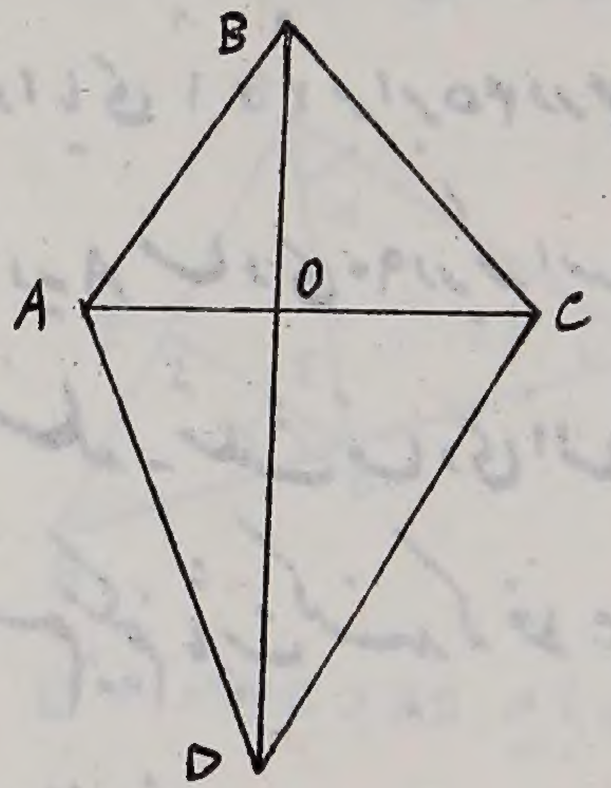
مسئله ـ در مثلث متساوی الساقین ABC ضلع AD را باندازهٔ AB امتداد میدهیم نقطه D را به C وصل کرده ثابت کنید که در مثلث BCD یک زاویه برابر دو زاویه دیگر است



حل ـ در مثلث متساوی الساقین ABC داریم $\gamma=\beta$ و از مثلث متساوی الساقین CAD میتوان نوشت $\delta=\gamma'$ پس $\gamma+\gamma'=\beta+\delta$ یعنی

$$\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}$$

مسئله ـ در هر چهارضلعی مجموع دو قطر بزرگتر است از نصف محیط



حل ـ چون در هر مثلث هر ضلع کوچکتر است از مجموع دو ضلع دیگر لذا روابط زیر را به ترتیب می نویسیم

$$BC < BO+OC$$

$$AB < AO+OB$$

$$AD < OA+OD$$

$$CD < OC+OD$$

و یا $AB+BC+CD+DA < 2OB+2OC+2OD+2OA$

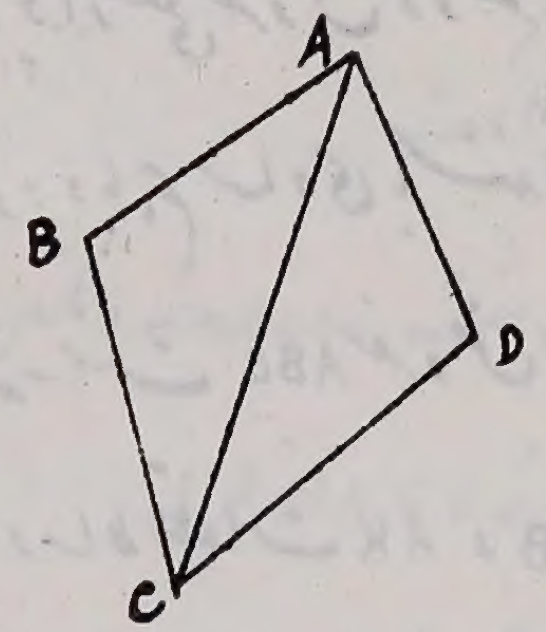
و یا $AB+BC+CD+DA < 2(OB+OD)+2(OA+OC)$

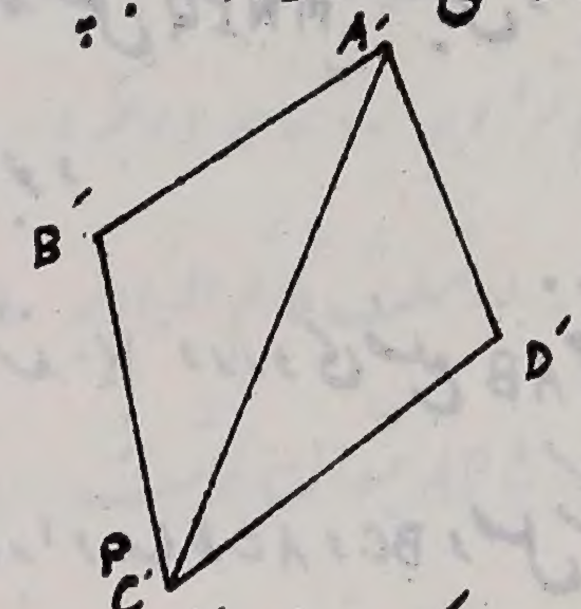
که بدینصورت نیز میتوان نوشت

$$\frac{AB+BC+CD+DA}{2} < BD+AC$$

مسئله ـ اگر اضلاع چهارضلعی ABCD نظیر به نظیر با اضلاع چهارضلعی A'B'C'D' متساوی بوده و یک زاویه A نیز مساوی با A' باشد این دو چهارضلعی متساویند

حل ـ قطر BC و B'C' را وصل می کنیم حال گوئیم دو مثلث ABC و A'B'C' که دو ضلع و زاویه بینهما مساویند متساوی میشوند و نتیجه میشود که BC مساوی B'C' باشد حال دو مثلث BCD و B'C'D' که در سه ضلع مساوی هستند مساوی بوده و بالنتیجه چهارضلعی ABCD با چهارضلعی A'B'C'D' متساوی شد





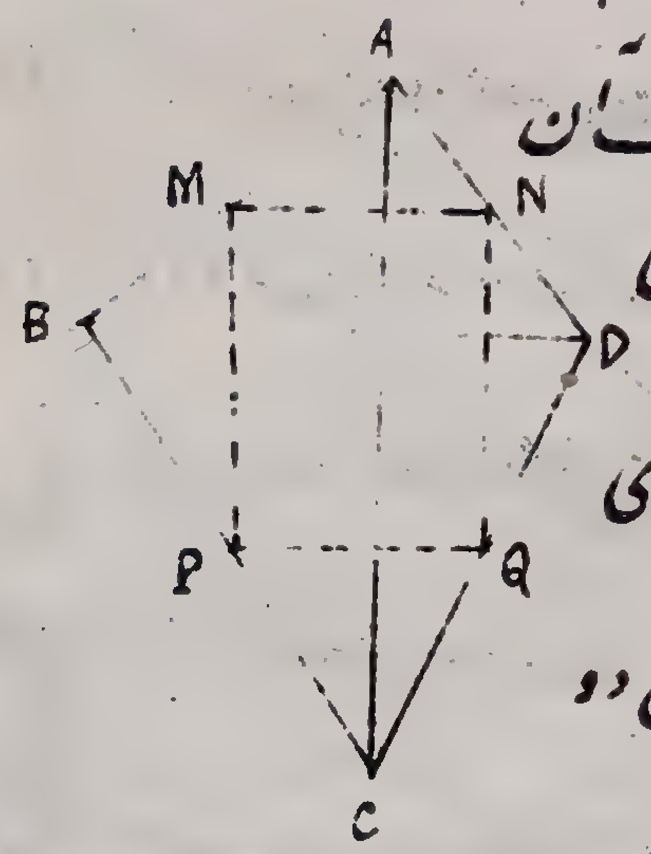
مسئله ـ ثابت کنید که اگر در چهارضلعی ABCD اوساط اضلاع را بهم وصل کنیم شکل حاصل متوازی الاضلاع است

حل ـ دو قطر BD و AC را وصل نموده بعد اوساط اضلاع را نیز بهم وصل می کنیم شکل MNPQ بدست میآید در این شکل ملاحظه میشود که اولاً MN موازی BD و نصف آنست زیرا در مثلث ABD خط MN که اوساط دو ضلع این

مثلث را بهم متصل کرده است اولاً موازی قاعده و ثانیاً نصف آنست و همچنین

در مثلث CBD نیز خط PQ بموازات BD و نصف آنست پس از اینجا

نتیجه میشود که اولاً MN با PQ موازی بوده و ثانیاً باهم مساوی باشند و از طرف دیگر



در مثلث DAC خط NQ بموازات AC و نصف آن

طول دارد و همچنین در مثلث BAC خط MP موازی

AC و نصف آنست پس این دو خط نیز باهم موازی

و مساوی میشوند شکل MNPQ که اضلاعش دو

بدو موازی و مساوی شد متوازی الاضلاع است

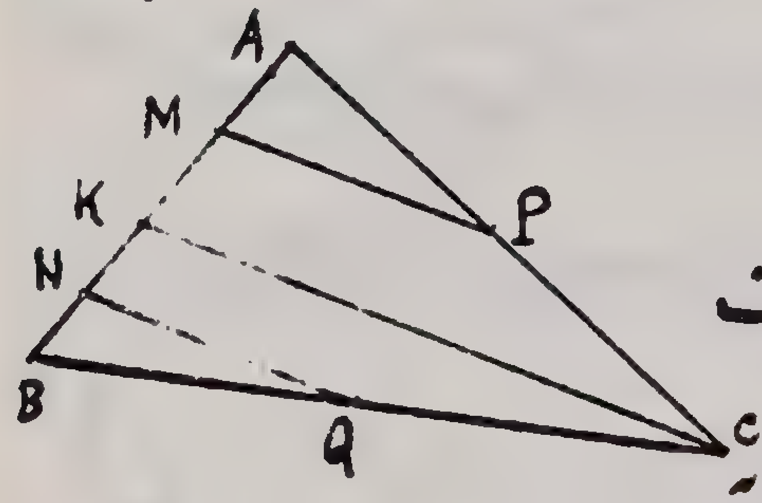
اگر در چهار ضلعی مفروض دو قطر برهم عمود باشند شکل MNPQ مستطیل و اگر دو قطر

برهم عمود و باهم مساوی باشند شکل مربع خواهد بود

مسئله - مثلث ABC مفروض است نقطه مانند K در روی ضلع AB اختیار

کرده اوساط قطعات AK و KB را بترتیب باوساط AC و BC وصل میکنیم ثابت

کنید که NQ = MP میباشد



حل - نقطه K را به C وصل میکنیم بعد در مثلث

AKC ملاحظه میشود که ضلع NP از وسط AK به

وسط AC وصل شده است برابر نصف CK میباشد و همچنین در مثلث

CBK نیز خط NQ خط واصل بین اوساط اضلاع این مثلث است پس برابر

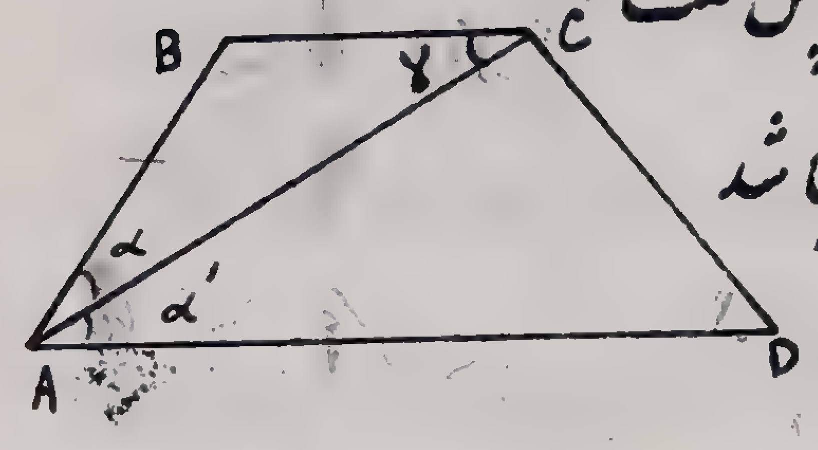
نصف CK است لذا معلوم میشود که

NQ = MP میباشد

مسئله - در ذوذنقه متساوی الساقین ABCD قاعده کوچک BC برابر ساق

AB میباشد ثابت کنید که قطر AC منصف الزاویه A میباشد

حل - چون ضلع BC = AB است پس مثلث



ABC متساوی الساقین بوده لذا $\hat{\gamma} = \hat{\alpha}$ میباشد

اما چون $\alpha' = \gamma$ زیرا دو خط BC و AD

موازی و AC قاطع است پس لازم میآید که $\alpha' = \alpha$ باشد و AC منصف الزاویه

راُس A ـ

مسئله - زاویه بین میانه و ارتفاع راُس زاویه قائمه را حساب کنید در صورتیکه

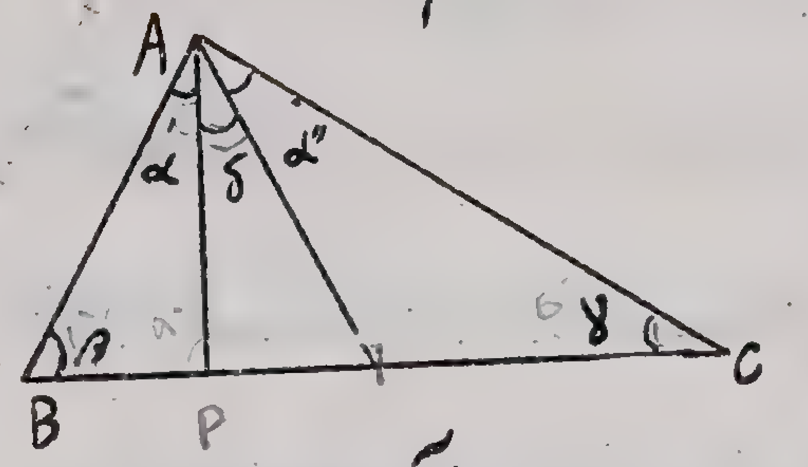
میدانیم زاویه $\beta = ۷۰$ درجه و $\gamma = ۵۰$ درجه است

حل - در مثلث قائم الزاویه APB میتوان نوشت $\alpha' + \beta = ۹۰$ و همچنین در

مثلث APC میتوان نوشت $\delta + \alpha'' + \gamma = ۹۰$ و از طرفی

$\alpha' + \delta + \gamma = ۹۰$ درجه است پس معلوم میشود که $\alpha'' = \alpha'$ است

بنابراین $\alpha' + \beta = \alpha'' + \delta + \gamma$



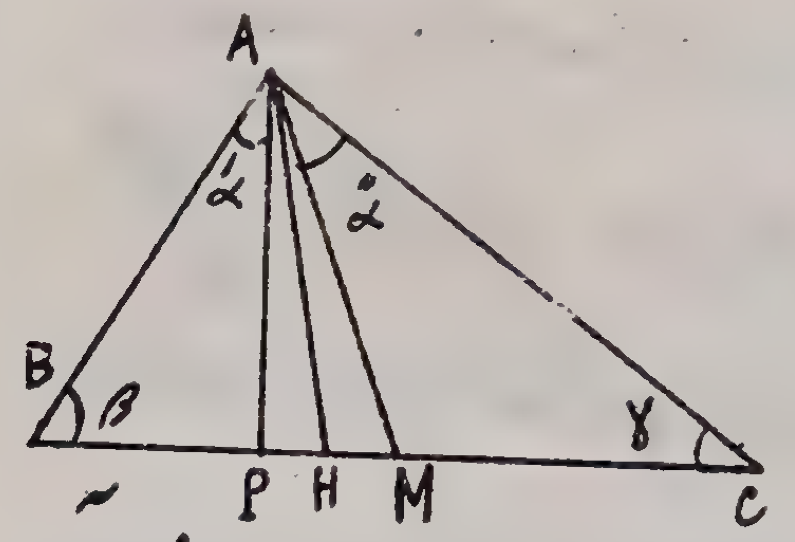
زیرا هرکدام ۹۰ درجه اند پس معلوم میشود که

$\gamma + \delta = \beta$ یعنی $\delta = \beta - \gamma$ یعنی $\delta = ۷۰ - ۵۰$ و از آنجا $\delta = ۲۰$ درجه

مسئله - در مثلث قائم الزاویه منصف الزاویه راُس قائمه زاویه بین میانه

و ارتفاع را نیز نصف میکند

حل ـ باید ثابت کرد که AH منصف الزاویه مثلث BAC زاویه PAM را که مابین ارتفاع AP و میانه AM تشکیل شده است نیز نصف می کند لذا گوئیم چون مثلث



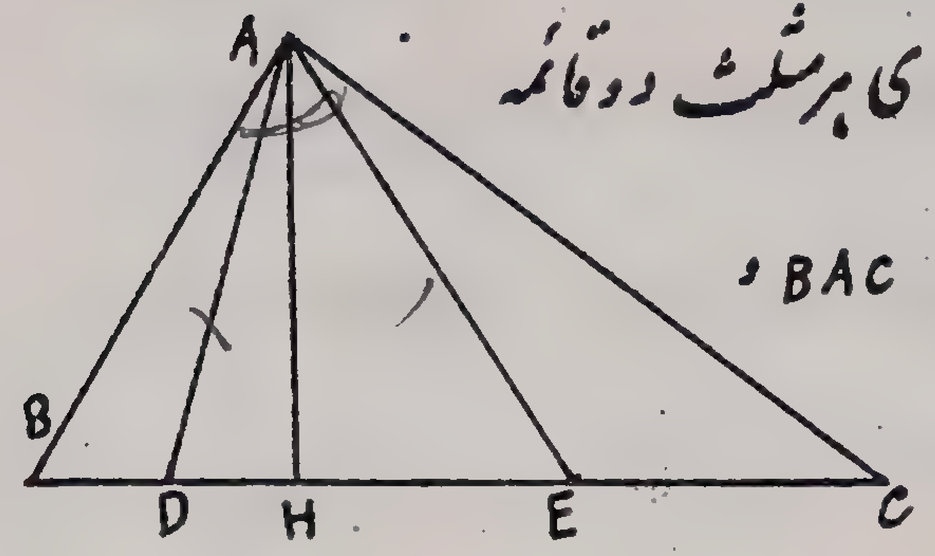
AMC تساوی الساقین است پس $\alpha'' = \gamma$ ولی چون $\beta + \gamma = 90$ درجه و از طرفی $\alpha' + \beta = 90$ درجه است پس لازم میاید که $\alpha' = \alpha'' = \gamma$ باشد ولی چون زاویه $\hat{HAC}$ برابر HAB است چون از هر کدام دو مقدار مساوی α'' و α' کسر گردد بقیه با هم مساوی میماند یعنی HAP = HAM میشود

مسئله ـ ثابت کنید در مثلث قائم الزاویه میانه وارد از رأس زاویه قائمه برابر نصف وتر است

حل ـ عمود منصف AC را رسم میکنیم تا در نقطه M وتر BC و ضحت که MA = MC است یعنی $\gamma = \alpha'$ میباشد ولی چون از طرفی $\gamma + \beta = 90$ است پس $\alpha' + \beta = 90$ درجه امّا میدانیم که $\alpha + \alpha' = 90$ درجه است پس از اینجا معلوم میشود که $\beta = \alpha$ است یعنی مثلث AMB نیز تساوی الساقین بوده پس AM = MB میشود و از آنجا نتیجه میشود که AM نصف وتر BC میباشد

مسئله ـ مثلث قائم الزاویه BAC که زاویه A قائمه است مفروض

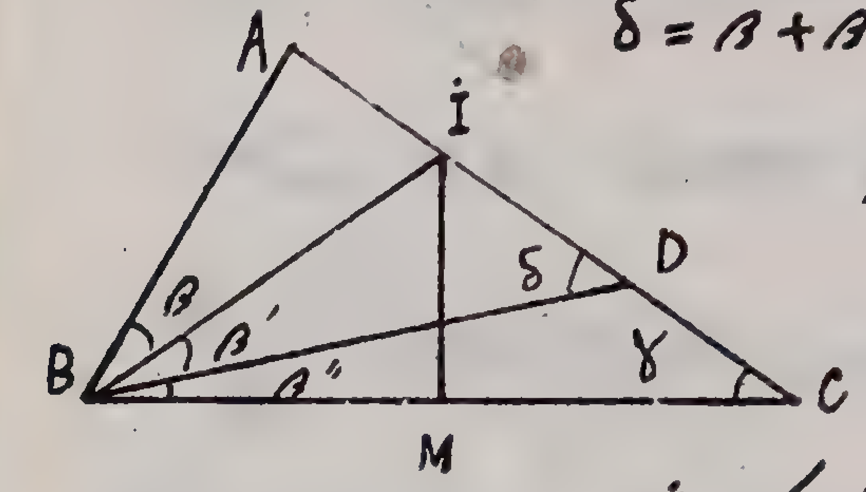
میباشد ارتفاع AH را رسم میکنیم و AD و AE منصف الزاویه های BAH و CAH را بترتیب رسم کرده مطلوبست محاسبه زاویه DAE و اثبات اینکه دو مثلث DAC و BAE تساوی الساقین اند



حل ـ اولاً میدانیم که مجموع زوایای هر مثلث دو قائمه است پس وقتی دو مثلث قائم الزاویه BAC و BHA را ملاحظه کنیم مشاهده میشود که زاویه A در اولی و $\hat{H}$ در دومی قائمه است زاویه B هم متعلق بهر دو مثلث است پس لازم میاید که زاویه سوم آنها یعنی $\hat{BAH} = \hat{C}$ گردد همچنین در دو مثلث BAC و HAC لازم میاید که $\hat{HAC} = B$ باشد پس واضح شد که زاویه $DAE = \frac{B}{2} + \frac{C}{2}$ است یعنی $\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$ حال ثابت می کنیم که مثلث BAE تساوی الساقین است باین دلیل که زاویه $\hat{BAE} = \hat{BEA}$ زیرا $\hat{BAE} = \hat{C} + \frac{\hat{B}}{2}$ و زاویه $\hat{BEA} = \hat{C} + \frac{\hat{B}}{2}$ میباشد چون زاویه خارجه مثلث AEC میباشد همچنین در مثلث ACD زاویه $\hat{ADC} = \hat{B} + \frac{\hat{C}}{2}$ زیرا خارجه مثلث ABD میباشد و چون زاویه DAC نیز مساوی $\hat{B} + \frac{\hat{C}}{2}$ میباشد پس مثلث ACD تساوی الساقین است

مسئله ـ در مثلث قائم الزاویه ABC در روی ضلع AC قطعه AD = AB را جدا می کنیم و اگر نقطه I محل تلاقی عمود منصف ضلع BC با AE باشد ثابت کنید که $\hat{ABI} = 2\hat{DBC}$

حل ـ باید ثابت کرد که $\beta = 2\beta''$ چون مثلث ABD متساوی الساقین است زیرا بنا بفرض $AB = AD$ است پس $\hat{\delta} = \hat{\beta} + \hat{\beta'}$

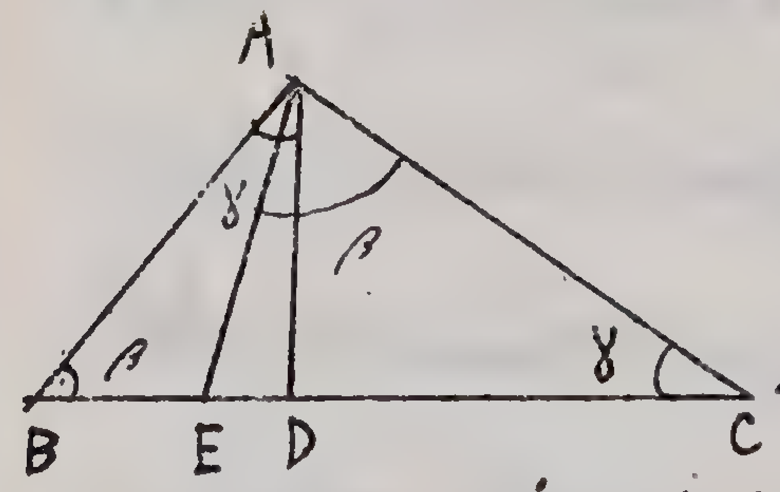


عمود منصف Mi خط AC را در نقطه I قطع میکند این نقطه از نقاط B و C بیک فاصله است پس $BI = IC$ لذا نتیجه میشود که در مثلث BIC زوایای $\beta'' + \beta' = \gamma$ باشد اما چون زاویهٔ δ خارجهٔ مثلث BDC است پس چنین خواهیم داشت $\hat{\delta} = \beta'' + \gamma$ و یا چون بجای δ مقدارش را قرار دهیم چنین میشود $\beta'' + \gamma = \beta' + \beta$ و چون γ نیز برابر $\beta'' + \beta'$ است پس

$$\beta' + \beta'' + \beta' + \beta \quad \text{یعنی} \quad \beta = 2\beta''$$

مسئله ـ در مثلث ABC خط AD را چنان رسم میکنیم که AB زاویه برابر γ ایجاد کند و همچنین خط AE را طوری رسم می کنیم که با AC زاویه برابر β بسازد ثابت کنید که مثلث DAE متساوی الساقین میباشد

حل بنا بفرض زاویه



$$(1) \quad E\hat{A}C = E\hat{A}D + D\hat{A}C = \hat{B}$$ وزاویه

$$(2) \quad D\hat{A}B = D\hat{A}E + E\hat{A}B = \hat{\gamma}$$ میباشد

واما زاویهٔ D خارجهٔ مثلث ADC بوده لذا مقدارش برابر است با

$$(3) \quad \hat{D} = D\hat{A}C + \hat{\gamma}$$ و همچنین زاویه خارجه مثلث AEB است و مقدارش

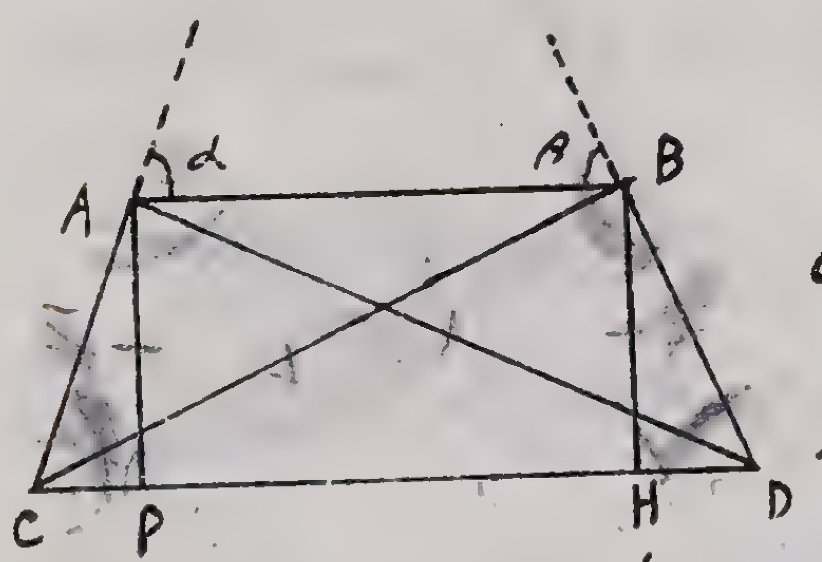
مساویست با $(4) \quad \hat{E} = E\hat{A}B + \hat{\beta}$ حال اگر در رابطه (۳) و (۴) مقدار γ و β را مطابق انچه که در رابطه (۲) و (۱) است قرار دهیم چنین خواهیم داشت

$$\hat{D} = D\hat{A}C + D\hat{A}E + E\hat{A}B \quad \text{و} \quad \hat{E} = E\hat{A}B + D\hat{A}E + D\hat{A}C$$

ملاحظه میشود که زاویه $D = \hat{E}$ لذا مثلث ADE متساوی الساقین است

طریقه دیگر ـ این طریق که ساده تر است عبارت از انیکه گوئیم دو زاویه از مثلث ABD مساوی با دو زاویه مثلث ABC است یعنی زاویه B متعلق بهر دو مثلث است و زاویه $BAD = \gamma$ جدا شده است پس زاویه سوم یعنی $\hat{D}$ قطعاً مساوی $\hat{A}$ میباشد $(1) \quad \hat{D} = \hat{A}$ زیرا مجموع زوایای هر مثلث دو قائمه میباشد همچنین در مثلث AEC که زاویه γ بر زاویه γ مثلث ABC منطبق و زاویه $E\hat{A}C = \hat{\beta}$ بنا بفرض است پس لازم میآید که زاویه سوم آن یعنی $(2) \quad \hat{A} = \hat{E}$ باشد از رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه میشود که مثلث ADE متساوی الساقین است

مسئله ـ در ذوزنقهٔ متساوی الساقین دو قطر مساوی و دو زاویهٔ $\hat{A} = \hat{B}$ و $\hat{C} = \hat{D}$ است



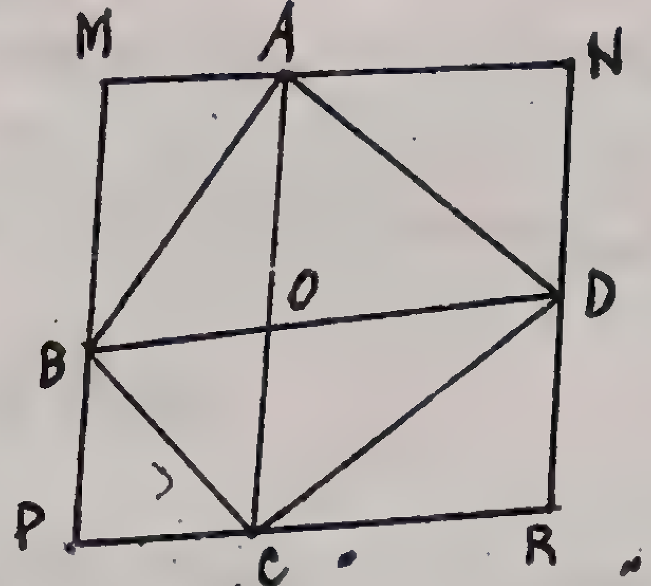
حل ـ ابتدا ثابت میکنیم که زاویهٔ $\hat{C} = \hat{D}$ برای اینکار دو عمود BH و AP را از نقاط A و B بر CD فرود میآوریم و گوئیم دو مثلث قائم الزاویه BHD و APC متساوی هستند (دو ضلع و زاویهٔ مقابل بضلع اعظم) پس لازم میآید $\hat{C} = \hat{D}$

باشد حال اگر AC و AD را کمی امتداد دهیم ملاحظه میشود که $\hat{\alpha}=\hat{C}$ و $\hat{\beta}=\hat{D}$ میباشد اما چون $\hat{D}=\hat{C}$ است پس $\hat{\beta}=\hat{\alpha}$ است و همچنین زاویه α مجاور $\hat{A}$ و زاویه $\beta+B=180$ درجه لذا لازم میآید که $\hat{B}=\hat{A}$ نیز باشد حال برای اثبات آنکه قطر $AD=BC$ است گوئیم دو مثلث ACD و BDC متساویند زیرا $\widehat{BD}=\widehat{AC}$ و CD در هر دو مشترک و زاویه بین این دو ضلع یعنی $\hat{C}=\hat{D}$ است پس از تساوی این دو مثلث لازم میآید $AD=BC$ باشد

مسئله ـ ثابت کنید که اگر از رئوس چهارضلعی ABCD خطوطی بموازات اقطار آن رسم کنیم متوازی الاضلاعی بمساحت دو برابر چهارضلعی بدست میآید

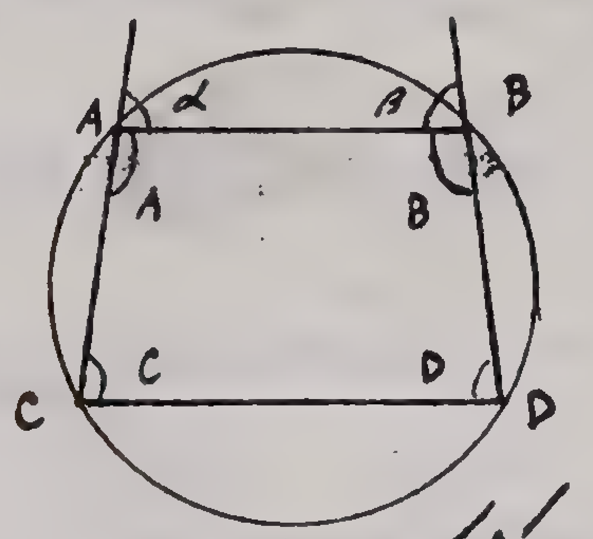
حل ـ دو قطر AC و BD از چهارضلعی را رسم نموده و خطوط MN و PR را بترتیب از نقاط A و C بموازات BD رسم نموده و همچنین NP و MP را از D و B بموازات خط AC نیز رسم مینمائیم واضحست که شکل MPNR متوازی الاضلاع میباشد حال ثابت میکنیم که مساحتش دو برابر مساحت ABCD است زیرا مساحت MPNR از مساحت چهارضلعی مساحات مثلثهای AND و AMB و BPC و CRD را زیادی دارد و مجموع این مثلثها نیز برابر مساحت چهارضلعی است زیرا $AND=OAD$ میباشد چون شکل OAND متوازی الاضلاع بوده و بوسیلهٔ قطر AD بدو مثلث متساوی تقسیم شده است و همچنین $BMA=OAB$ و مثلث $OCB=BPC$

و مثلث $CRD=OCD$ میباشد لذا متوازی الاضلاع MPNR دو برابر چهارضلعی میباشد



مسئله ـ ذوزنقهٔ متساوی الساقین قابل محاط شدن در دایره میباشد

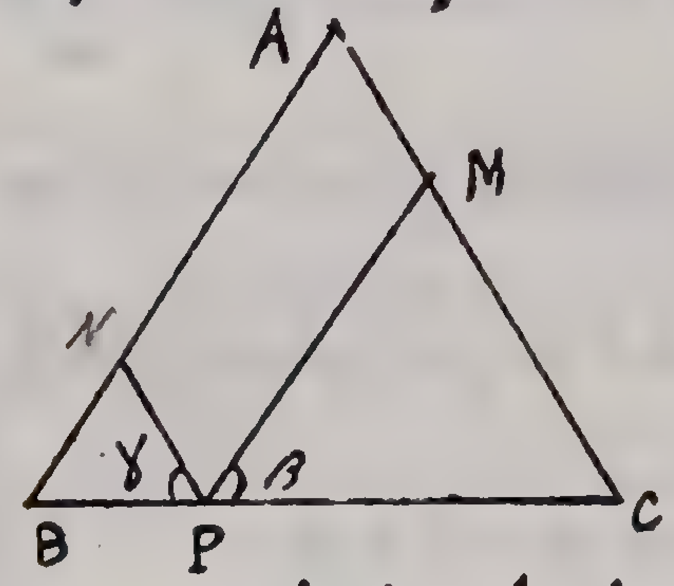
حل ـ چون ثابت شد که ذوزنقهٔ متساوی الساقین زوایای $\hat{C}=\hat{D}$ و $\hat{B}=\hat{A}$ است و چون از طرفی نیز زاویه $\hat{\alpha}=\hat{C}$ بوده و زاویه α با A مکمل است پس لازم میآید که زاویه C با A و $\hat{D}$ با $\hat{B}$ مکمل باشند یعنی $\hat{C}+\hat{A}=180$ درجه و $\hat{D}+\hat{B}=180$ درجه و یا $\hat{C}+\hat{B}=180$ و $\hat{D}+\hat{A}=180$ و این خود شرط قابل محاط بودن ذوزنقهٔ ABCD میباشد چه اگر نقاط C و B



بر روی محیط دایره O واقع باشند زاویه C مساوی با نصف قوس متقابلش یعنی $\frac{ABD}{2}$ و همچنین زاویه B نیز برابر است با نصف قوس متقابلش یعنی $\frac{ACD}{2}$ ملاحظه میکنیم که مجموع قوسهای $\widehat{ABD}+\widehat{ACD}$ برابر است با محیط دایره پس نصف آن یعنی $\frac{ABD}{2}+\frac{ACD}{2}$ برابر است با نصف دایره یعنی ۱۸۰ درجه و چون $\hat{C}+\hat{B}$ نیز مساوی ۱۸۰ درجه است و همچنین $\hat{A}+\hat{D}=180$ درجه میباشد پس شکل ABCD قابل محاط شدن در دایره است

مسئله - در مثلث متساوی الساقین نقطه مانند P در روی قاعده BC فرض نموده و از این نقطه دو خط بموازات دو ساق مثلث رسم میکنیم که ساقین را در نقاط M و N قطع میکند اگر ساق AB=۱۵ باشد ثابت کنید که محیط متوازی الاضلاع AMPN = ۳۰ میباشد

حل - چون شکل AMPN متوازی الاضلاع است زیرا اضلاعش دو بدو متوازیند پس AN=MP و AM=NP میباشد

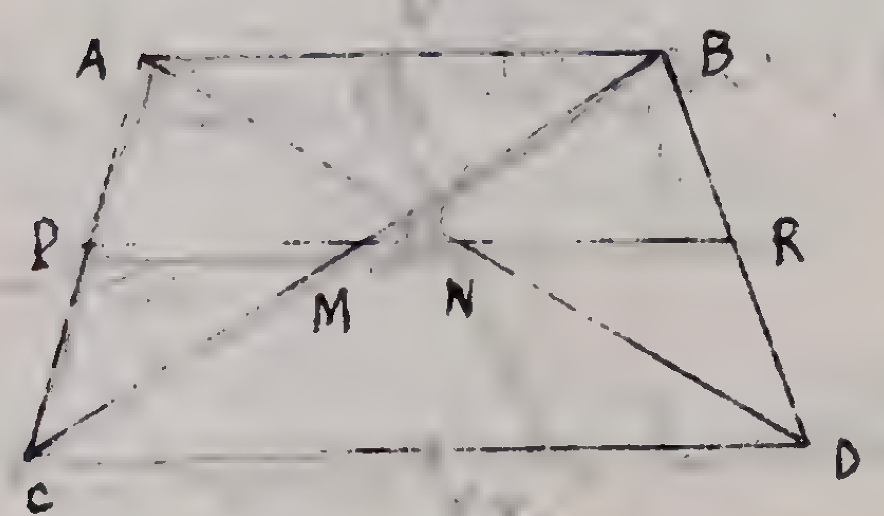


ثابت می‌کنیم که مثلث NBP متساوی الساقین است زیرا زاویه $\hat{\beta}=\hat{B}$ و همچنین $\hat{C}=\hat{\gamma}$ و چون $\hat{B}=\hat{C}$ است پس $\hat{\beta}=\hat{\gamma}$ و نتیجه میشود که $\hat{\gamma}=\hat{B}$ باشد لذا NB=NP میشود پس NB=AM است و چون AB=AC است پس لازم میآید AB−NB=AC−AM گردد یعنی AN=MC شود و چون AN=MP است پس MP=MC شده لذا چنین خواهیم داشت AN+NP+PM+AM=AB+AC=۳۰

مسئله - ذوذنقه ABCD مفروض است میانه آنرا رسم میکنیم این خط اقطار ذوذنقه را در نقاط M و N قطع می کند مطلوبست محاسبهٔ طول MN درصورتیکه AB=۷ متر و CD=۱۵ متر است

حل - میدانیم که میانه ذوذنقه یعنی PR خطی است که از وسط یک ساق توسط ساق دیگر حاصل شود و طولش برابر است با نصف مجموع قاعدتین

یعنی $PR=\frac{۷+۱۵}{۲}=۱۱$ ولی در مثلث CAB خط PM از وسط ضلع AC بموازات قاعده رسم شده پس ضلع مقابل را نیز نصف می کند و مقدارش برابر است با $\frac{AB}{۲}$ یعنی $\frac{۷}{۲}=۳٫۵$ متر و



همچنین NR خطی است که در مثلث DAB از وسط ضلع BD بموازات قاعده رسم شده پس برابر است با نصف قاعده یعنی $۳٫۵=\frac{۷}{۲}=\frac{AB}{۲}$ متر پس طول MN=PR−PM−NR یعنی ۴ متر MN=۱۱−۳٫۵−۳٫۵=۱۱−۷=۴

«حل تمرینات زیر بعهدهٔ دانش آموز است»

مسئله - در مثلث ABC زاویه $\hat{A}=۸۲$ درجه است زاویه حاصل بین منصف الزاویه داخلی B و C را حساب کنید

مسئله - در مثلث ABC زاویهٔ رأس $A=۷۹^{\circ}$ درجه است زاویهٔ حاصل بین منصف الزاویه داخلی C و منصف الزاویه خارجی B را تعیین کنید اولا بحسب درجه ثانیاً بحسب گراد

مسئله - در مثلث ABC زاویه $A=۳۹^{\circ}$ درجه و زاویه $C=۴۵^{\circ}$ مطلوبست محاسبه اولا زاویه AC با ارتفاع وارد از رأس C و ثانیاً محاسبهٔ زاویه AB با ارتفاع وارد از رأس C

مسئله - مثلث متساوی الساقین ABC را که محیط آن ۲۴ و ارتفاعش R

معلوم است بسازید

مسئله ـ مثلث متساوی الساقین که زاویهٔ A و قاعده BC آن معلوم است رسم کنید

مسئله ـ مطلوبست حل مسئله متساوی الساقین که ارتفاع و یک زاویهٔ آن معلومست

مسئله ـ مطلوبست رسم مثلث متساوی الساقینی که یک ضلع وارتفاع وارد بر همین ضلع معلومست

مسئله ـ مطلوبست رسم مثلث قائم الزاویه متساوی والساقینی که اولا وتر آن معلومست ثانیا ارتفاع وثالثا محیط آن معلوم باشد

مسئله ـ مطلوبست رسم مثلث غیرمشخصی که قاعده ومیانه وارتفاع راس A در آن معلوم باشد

مسئله ـ مطلوبست رسم مثلث ABC که دوضلع AB و AC آن معلوم وارتفاع وارد بر AB نیز معلوم باشد

مسئله ـ مثلثی رارسم کنید که دوضلع وارتفاع آن معلومست یعنی b و c و h_a

مسئله ـ ازمثلث قائم الزاویه یک ضلع مجاور بزاویه قائمه وارتفاع وارد بر وتر مطلوبست مثلث رارسم کنید

مسئله ـ مطلوبست رسم مثلثی که یکی از اضلاع آن ۷ سانتی متر ومیانه های وارد بر دوضلع دیگر یکی ۷٫۵ سانتی متر ودیگری ۶ سانتی متر معلومند

مسئله ـ ازمثلثی زاویه A وضلع a وارتفاع h_a معلومست مثلث رارسم کنید

مسئله ـ ازمثلثی a و $b-c$ و α معلومست آنرارسم کنید

مسئله ـ ازمثلثی a و $b+c$ و β معلومست آنرارسم کنید

مسئله ـ مثلث قائم الزاویه که یک ضلع مجاور بزاویه قائمه وتفاضل ضلع دیگراز وتر معلومست آنرارسم کنید

مسئله ـ ازمثلثی $b+c = 17$ و $\beta = 44{,}5$ و $\lambda = 82$ است مثلث را رسم کنید

مسئله ـ ازمثلثی b و c و m_c معلومست مثلث رارسم کنید

مسئله ـ ازنقطه P درون زاویه AOB خطی چنان رسم کنید که دراین نقطه بوسیله OA و OB بدوقطعه متساوی تقسیم شود

مسئله ـ ازنقطه λ دوخط موازی چنان رسم کنید که قطعه محصور بین دو خط دارای طول معینی باشد

مسئله ـ نقطهٔ در درون مثلث ABC پیداکنید که از اضلاع آن بفاصلهٔ مساوی باشد

مسئله ـ زاویه BAC ونقطه B درروی ضلع AB مفروض است مطلوبست تعیین نقطهٔ مانند M درروی همین ضلع بطریقی که از نقطهٔ B وضلع AC متساوی الفاصله باشد

مسئله. مجموع ۳ ارتفاع مثلث کمتر است از مجموع اضلاع آن

مسئله. ثابت کنید که اگر در مثلثی خط ارتفاع و منصف الزاویه برهم منطبق بود آن مثلث متساوی الساقین است

مسئله. هر مثلث متساوی الساقین دو میانه و دو ارتفاع و دو منصف الزاویه مساوی دارد

مسئله. مثلث ABC و میانه AD مفروض است ثابت کنید که اگر $AC > AB$ باشد میتوان داشت $\widehat{DAC} < \widehat{DAB}$ و $\widehat{ADC} > \widehat{ADB}$

مسئله. خطی که رأس مثلث را بوسط میانه وصل میکند ضلع مقابل را طوری قطع میکند که یک قطعه دو برابر قطعه دیگر است

مسئله. اضلاع مثلث متساوی الاضلاعی را بیک اندازه و یک جهت امتداد میدهند ثابت کنید که اگر نقاطی را که بدین طریق بدست میآید بهم وصل کنند مثلث متساوی الاضلاع خواهد بود

مسئله. ثابت کنید که اگر در مثلث قائم الزاویه ABC زاویه $B = ۳۰$ درجه و $C = ۶۰$ باشد ضلع AC مقابل بزاویه B نصف وتر است

مسئله. در روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC طول AD را مساوی AB و عمود بر AB و طول AE را مساوی AC و عمود بر AC رسم میکنیم ثابت کنید که ارتفاع AH از مثلث DAE میانهٔ مثلث ABC میباشد

مسئله. مطلوبست رسم چهارضلعی که یک ضلع و زاویه بین قطرهای آن معلوم باشد

مسئله. ذوذنقه قائمه را رسم کنید که ارتفاع و قاعده اطول و زاویه قاعده با یکی از ساقهای آن معلومست و در موقعیکه ارتفاع = ۱۸ سانتی متر و قاعدهٔ اطول = ۴۰ سانتی متر و زاویه معلوم ۴۵ درجه است

مسئله. مطلوبست رسم ذوذنقه که قاعدتین و زوایای آن معلومست

مسئله. مثلث متساوی الساقین ABC مفروض است قاعده BC را باندازه CD برابر AC امتداد میدهیم و AD را وصل مینمائیم اگر زاویه $ADB = \alpha$ باشد مطلوبست محاسبه زوایای مجاور بقاعدهٔ از مثلث ABC و زاویهٔ خارجی A در مثلث ABD

مسئله. مثلث قائم الزاویه ABC بزاویه قائمه A مفروض است طول BD را مساوی BA در امتداد CB جدا میکنیم و CE را مساوی CA در روی عمود وارد از رأس C بر وتر جدا نموده ثابت کنید که خط DE از رأس A میگذرد

مسئله. در مثلث قائم الزاویه ABC زاویه قائمه A ارتفاع AH را رسم میکنیم و منصف الزاویه BAH و همچنین HAC را رسم نموده این دو خط وتر را در نقاط D و E قطع میکند مطلوبست اولاً زاویه DAE و ثانیاً ثابت کنید که مثلثهای ABE و ACD متساوی الساقین هستند

مسئله. در مثلثی زوایای A و B و C معلومست مطلوبست محاسبه زاویه

بین ارتفاع و منصف الزاویه داخلی راس A

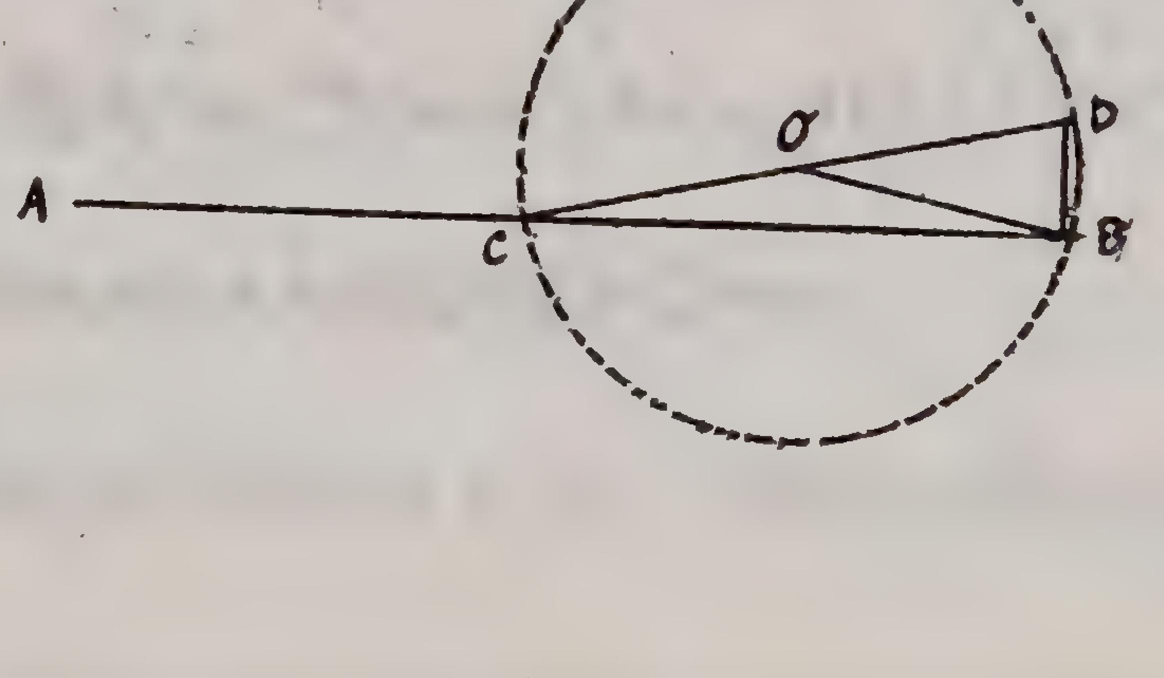
مسئله ـ در مثلث ABC هرگاه منصف الزاویه خارجی آنرا رسم کنیم تا یکدیگر را تقاطع کنند ۳ مثلث در خارج مثلث مفروض تشکیل میشود چه روابطی مابین زوایای این مثلث ها با مثلث مفروض موجود است

مسئله ـ مثلث ABC مفروض است و D نقطه وسط BC میباشد از نقطهٔ D عمودی بر منصف الزاویه راس A وارد می کنند که AB و AC را بترتیب در نقاط E و F قطع میکند ثابت کنید BE = CF

مسئله ـ خط AB و نقطه O وسط آن مفروض است دو خط Ax و By را در A و B بر خط مفروض عمود کرده و یک زاویه قائمه که راس آن در نقطهٔ O میباشد خطوط By و Ax را در D و C قطع می کند ثابت کنید اولاً خط CD فاصله اش از O ثابت است ثانیاً CD = AC + BD

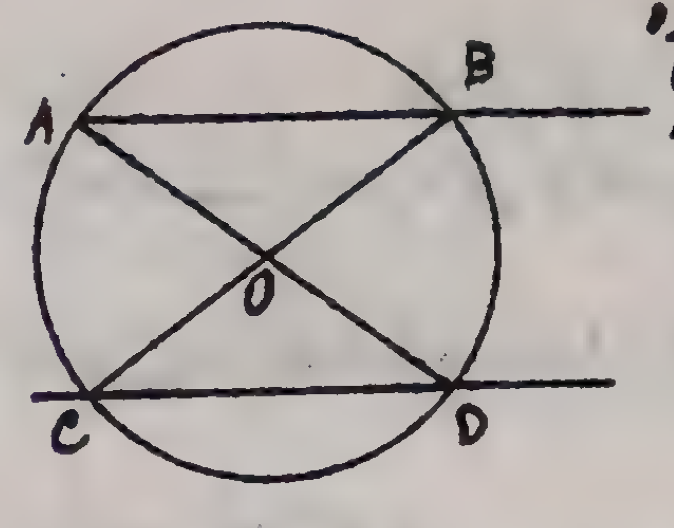
مسئله ـ از نقطه B واقع در روی خط AB عمودی بر آنخط اخراج کنید

حل ـ بمرکز اختیاری O و شعاع OB دایره رسم میکنیم تا خط AB را در نقطه دیگری مانند C قطع کند پس قطر CD را رسم نموده دایره را در نقطه D قطع نماید و عمود مطلوب خط DB است زیرا مثلث DBC قائم الزاویه میباشد



مسئله ـ از نقطه مفروض A خطی بموازات CD رسم کنید

حل ـ از نقطه A قاطعی مانند AD بر خط CD رسم میکنیم بعد در روی AD نقطه O را مرکز قرار داده دایره رسم می کنیم این دایره خط CD را در نقطه C قطع میکند پس قطر CO را رسم نموده امتداد میدهیم تا دایره را در نقطه B قطع کند لذا AB خط مطلوب بموازات CD میباشد

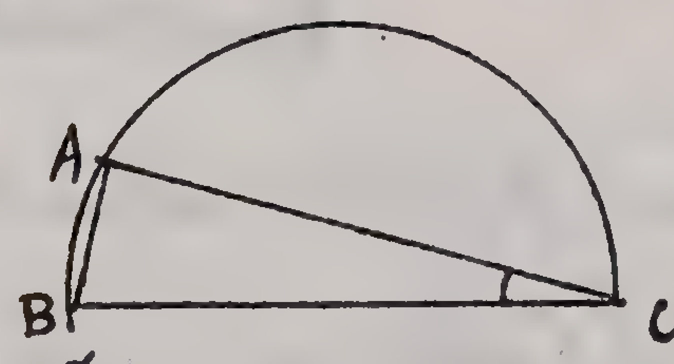


مسئله ـ در مثلث قائم الزاویه وتر و یک ضلع دیگر b معلوم است مثلث را رسم کنید

حل ـ بقطر وتر BC دایره رسم میکنیم بعد نقطه C را نیز مرکز قرار داده بشعاع CA = b دایره رسم میکنم تا دایره اول را در نقطه A قطع کند مثلث مطلوب BAC میباشد

مسئله ـ در مثلث قائم الزاویه وتر و یک زاویه معلوم است آنرا رسم کنید

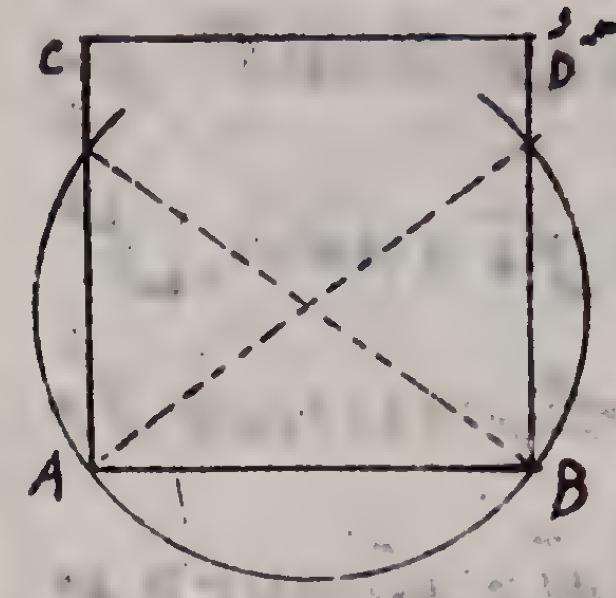
حل ـ وتر را قطر قرار داده دایره را رسم میکنم بعد از نقطه C زاویه برابر زاویه مفروض معلوم با خط BC میسازیم نقطه A بدست میاید



مسئله ـ مربعی که ضلعش معلوم است رسم کنید

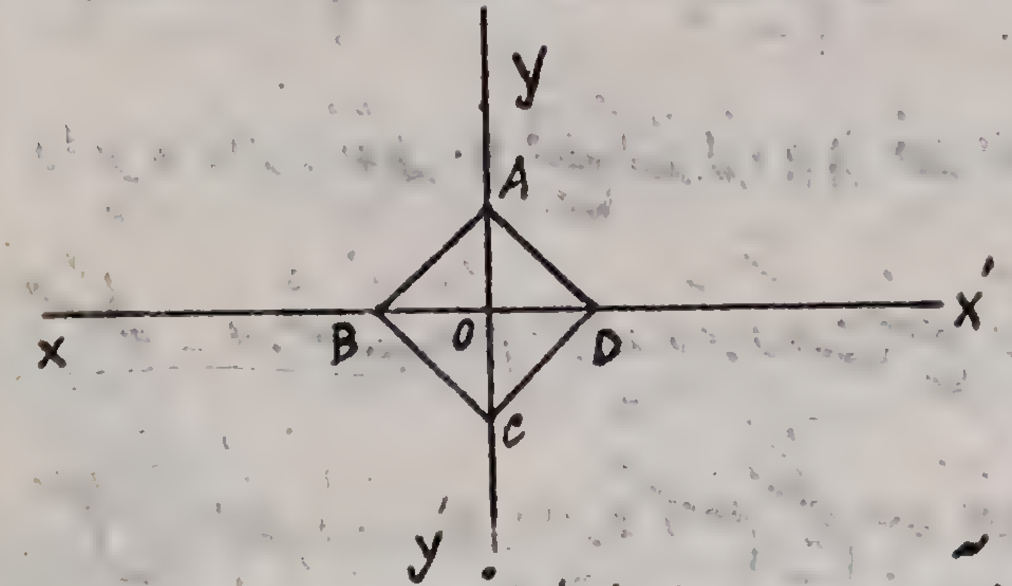
حل ـ خط AB = a که ضلع مربع است رسم میکنیم و از نقاط A و B مطابق مسئله قبل دو عمود BD و AC را بر آن اخراج کرده و طول a را از آنها جدا

میکنیم از وصل نقاط c به D مربع مطلوب حاصل میشود



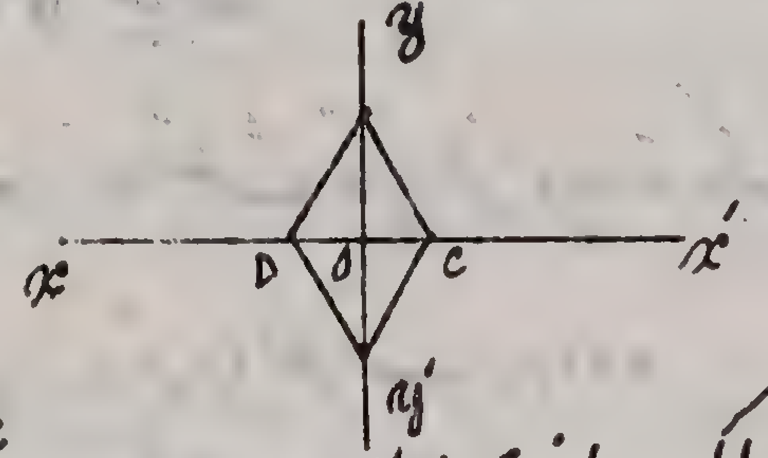
مسئله ـ مطلوبست رسم مربعی که قطر آن معلومست

حل ـ کافیست دو خط 'xx و 'yy را بر هم عمود کرده و طولهای OA و OB و OC و OD برابر نصف قطر معلوم بر روی آنها نقل نمود و مربع مطلوب ABCD میباشد



مسئله ـ مطلوبست رسم لوزی که قطر آن a و b معلومند

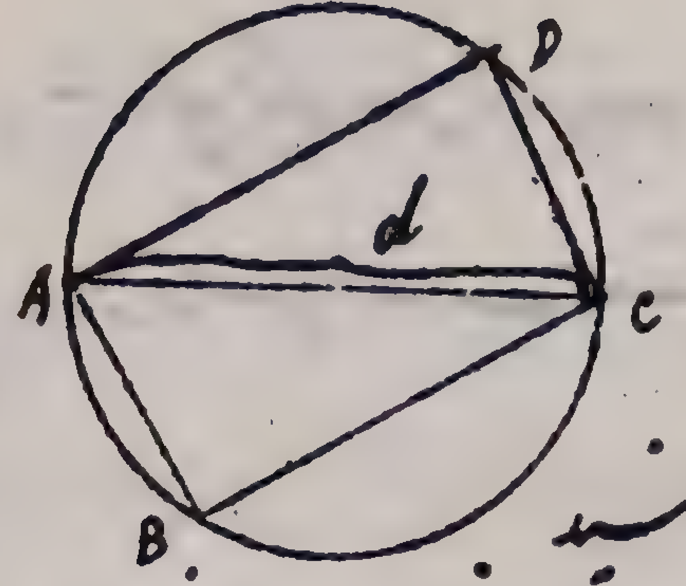
حل ـ دو محور 'xx و 'yy را بر هم عمود کرده طولهای $\frac{a}{2} = OB = OA$ را از دو طرف نقطه O در روی محور و طولهای $\frac{b}{2} = OD = OC$ را از دو طرف نقطه O در روی محور 'xx جدا کرده لوزی مطلوب ABCD میباشد



مسئله ـ مطلوبست رسم مستطیلی که قطر آن d و یک ضلعش a معلومست

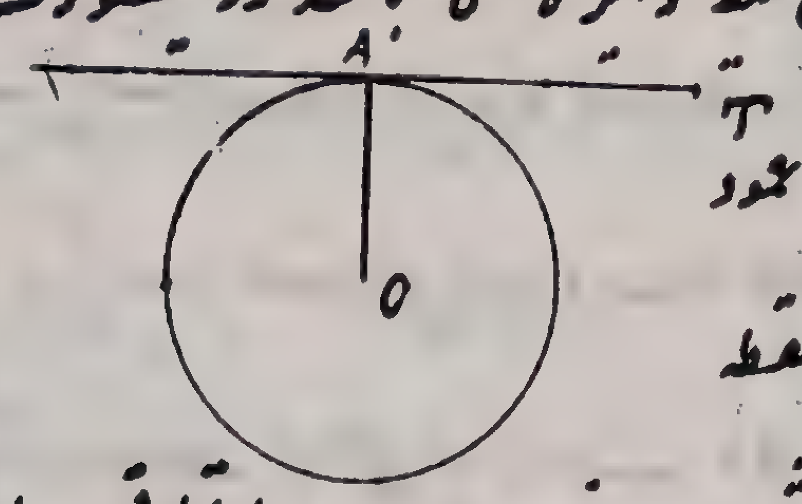
حل ـ قطر مستطیل را که $AC = d$ است قطر قرار داده دایره رسم میکنیم و بعد نقطه C و A را بترتیب مرکز قرار میدهیم و بشعاع معین a (ضلع مستطیل) دو دایره رسم میکنیم که دایره اول را در نقاط D و B قطع میکنند مستطیل

مطلوب ABCD است

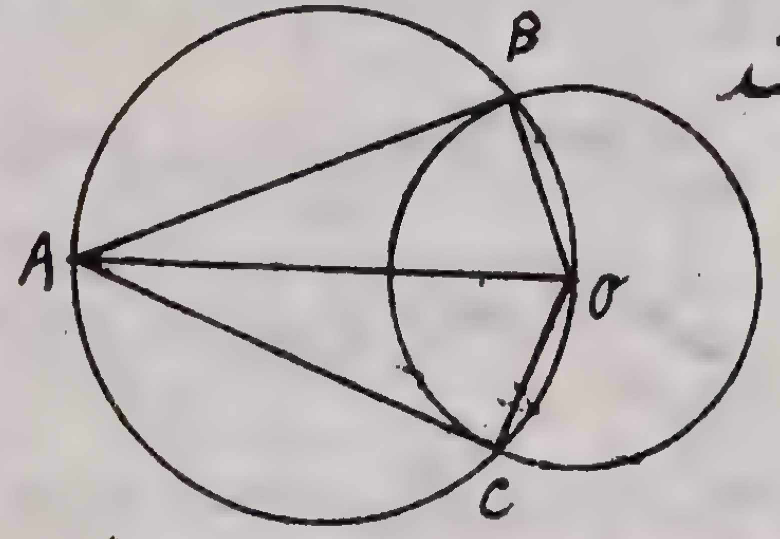


مسئله ـ از نقطه A مماس بر دایره O رسم کنید.

حل ـ اولاً اگر نقطه A در روی محیط دایره O باشد در اینصورت کافیست شعاع OA را رسم کنیم و از نقطه A عمود AT را بر OA رسم نمائیم ثانیاً اگر نقطه



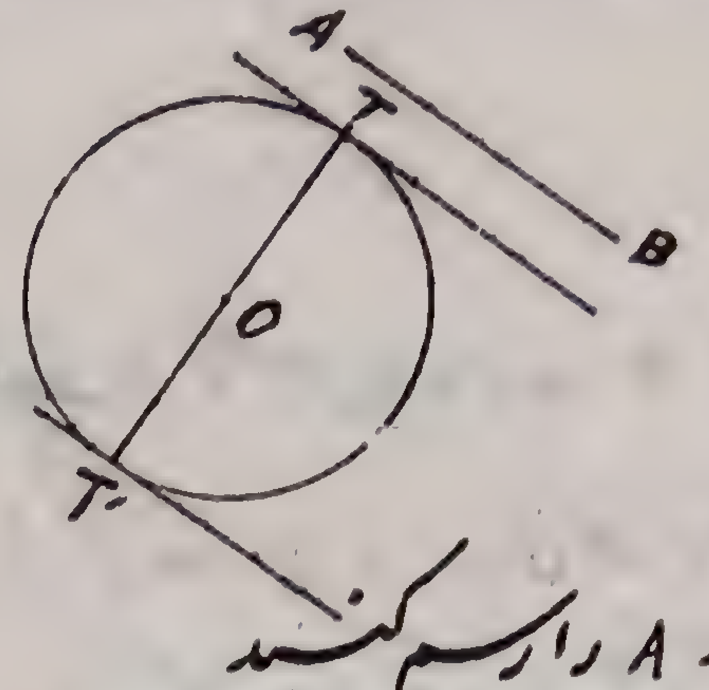
در خارج دایره مفروض O واقع باشد در اینصورت AO را قطر قرار داده و دایره را با این قطر رسم میکنیم این دایره مفروض O را در دو نقطه B و C قطع میکند پس AB و AC دو مماس مطلوب میباشند زیرا زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ قائمه هستند چون دو مثلث ABO و ACO قائم الزاویه میباشند و چون این دو مثلث متساوی هستند لذا دو مماس AB و AC متساوی میباشند و خط OA نیز منصف الزاویه BAC میباشد



مسئله ـ بر دایره بمرکز O مماس رسم کنید که با خط مفروض موازی باشد

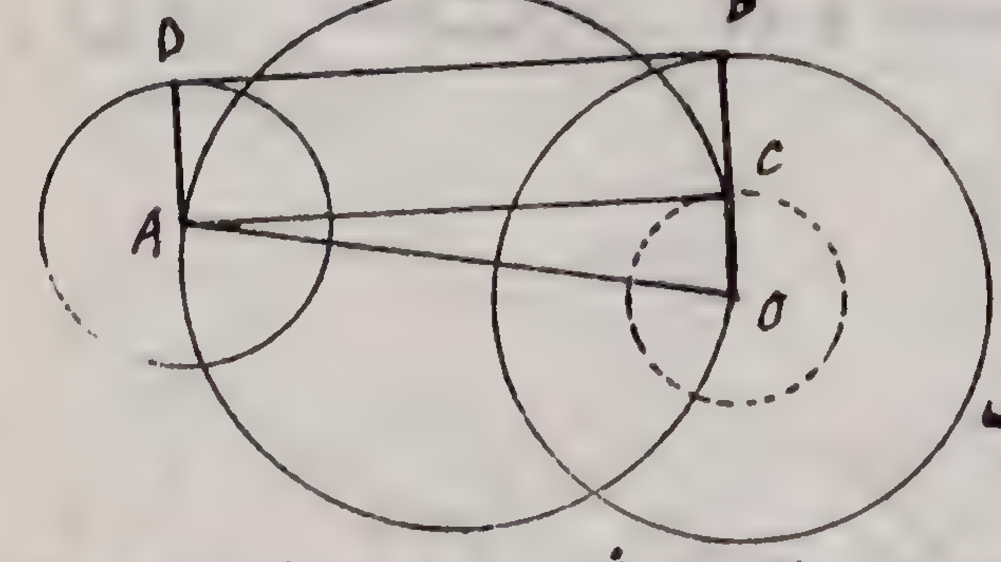
حل ـ از مرکز O خط شعاعی عمود بر AB وارد میکنیم آنخط دایره را در دو نقطه

T و 'T قطع میکند حال از این دو نقطه دو قطر T و 'T را بر قطر 'TT عمود میکنیم هر دو مماس مطلوب هستند



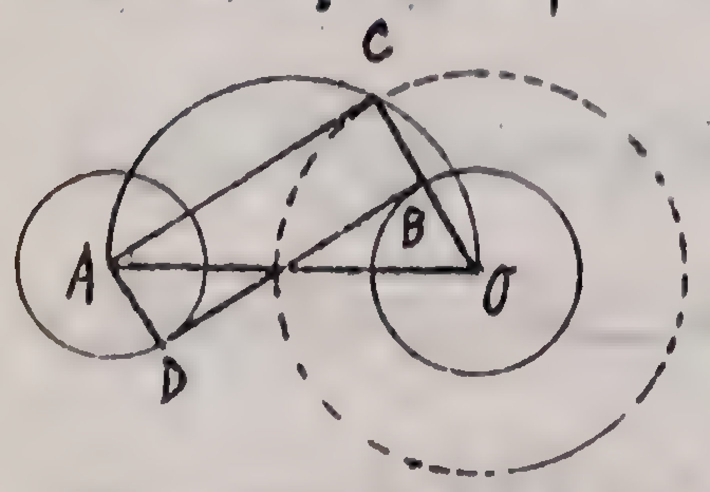
مسئله - مماس مشترک دو دایره O و A را رسم کنید

حل - اگر فرض کنیم مسئله حل شده باشد و BD مماس مشترک مطلوبست ملاحظه کنیم اگر در نقطه A خطی بموازات BD رسم شود بسهولت میتوان فهمید که شکل BDAC مستطیل است زیرا OB عمود بر BD و AC و همچنین AD عمود بر BD میباشد (زیرا شعاع بر مماس عمود است) پس AD=BC لذا طول OC برابر تفاضل دو شعاع یعنی 'R - R میشود و خط AC مماس بر دایره بشعاع R - R' میباشد لذا از اینجا راه حل مسئله بدست میاید بدینطریق نقطه O را مرکز قرار داده و بشعاع 'R - R دایره رسم میکنیم و از نقطه خارجی A مماس بر دایره مانند مسئله قبل رسم میکنیم و از نقطه O بر نقطه تماس C وصل نموده امتداد میدهیم تا دایره بزرگ O در نقطه B قطع کند پس خط BD که بموازات AC رسم شده جواب مسئله یعنی مماس مشترک مطلوبست



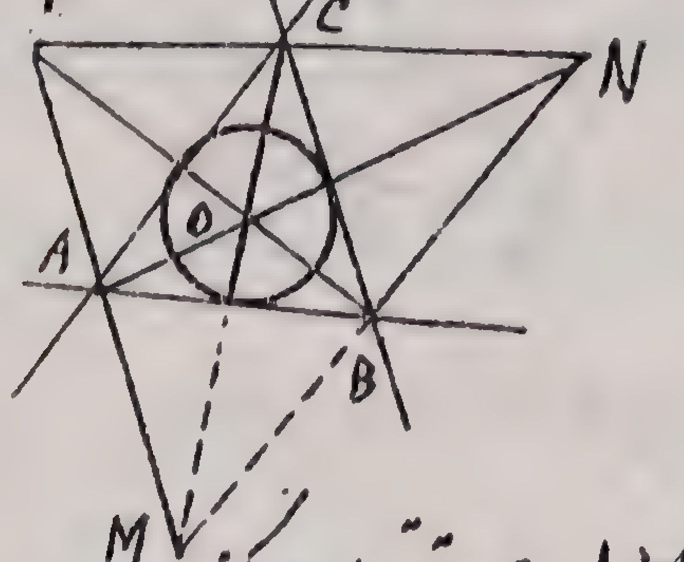
تبصره - ممکن است مماس مشترک دو دایره مفروض O و A داخلی باشد در اینصورت طرز عمل بطریق زیر است

نقطه O را مرکز قرار داده و بشعاع 'R + R دایره رسم میکنیم و از نقطه خارجی A مماس AC را بر این دایره رسم کرده خط OC را وصل میکنیم این خط دایره O را در نقطه B قطع میکند حال خطی که از نقطه B بموازات AC رسم شود جواب مسئله است پس BD مماس مشترک داخلی مطلوب میباشد



مسئله - مطلوبست رسم دایره که بسه ضلع مثلثی مماس باشد

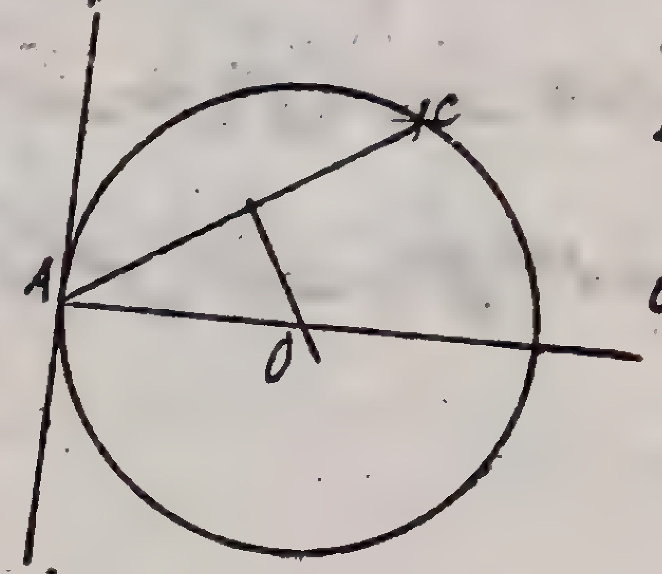
حل - معلومست که اگر دایره بسه ضلع مثلثی مماس باشد باید مرکز این دایره از سه ضلع مثلث بیک فاصله باشد و چنین نقطه که از سه ضلع بیک فاصله باشد در محل تلاقی ۳ منصف الزاویه مثلث میباشد پس نقطه O محل تلاقی منصف الزاویه C و B و O مرکز دایره مطلوب میباشد و چون هریک از منصف الزاویه داخلی با دو منصف الزاویه خارجی دیگر نیز در یک نقطه که از اضلاع مثلث متساوی الفاصله است تقاطع می کنند پس چهار دایره بمراکز O و P و M و N جواب مسئله میباشند دایره O محاطی و ۳ دایره دیگر



و دوایر محاطی خارج نامیده میشوند

مسئله ـ دایرهٔ چنان رسم کنید که در نقطهٔ معینی با خط مفروض مماس بوده و از نقطهٔ خارجی دیگر میگذرد

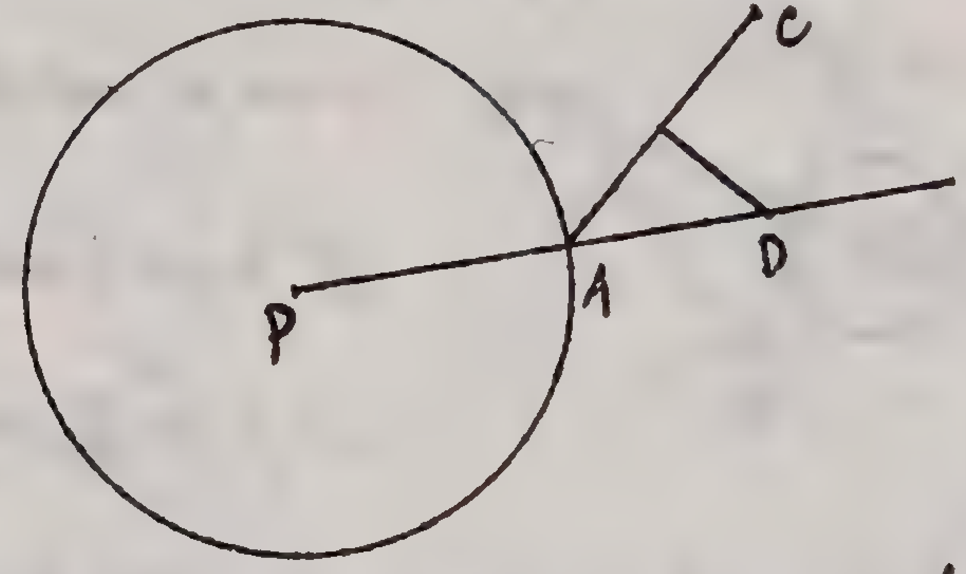
حل ـ چون دایره در نقطهٔ A با خط مفروض D مماس باید شود پس مرکز دایرهٔ



مطلوب در روی عمود وارد از A بر خط D میباشد و همچنین چون دایره باید از نقطهٔ C بگذرد پس مرکز دایره واقعست بر روی عمود منصف AC لذا محل تلاقی این دو عمود مرکز دایرهٔ مطلوب یعنی جواب مسئله است

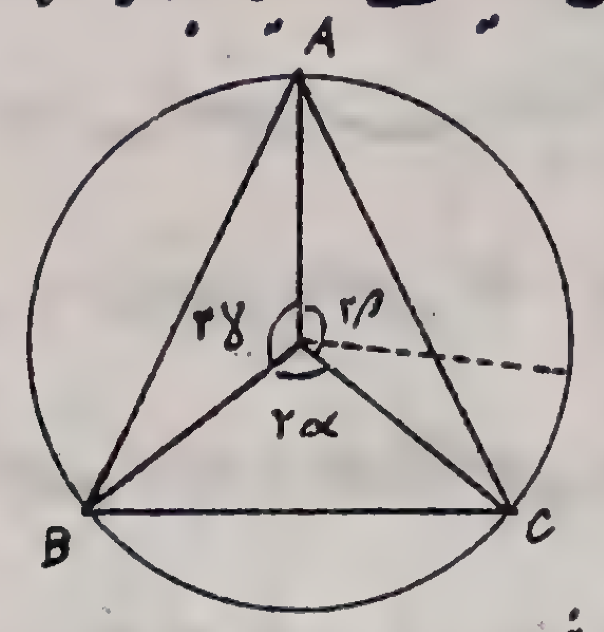
مسئله ـ دایرهٔ چنان رسم کنید که از نقطهٔ خارجی C گذشته و در نقطهٔ A به دایرهٔ دیگر P مماس باشد

حل ـ مرکز دایره واقعست از طرفی در امتداد شعاع PA و از طرف دیگر در روی عمود منصف AC پس در روی محل تلاقی این دو خط واقعست



مسئله ـ از مثلثی زوایای α و β و γ و شعاع دایرهٔ محیطی آن R معلومست آن مثلث را رسم کنید

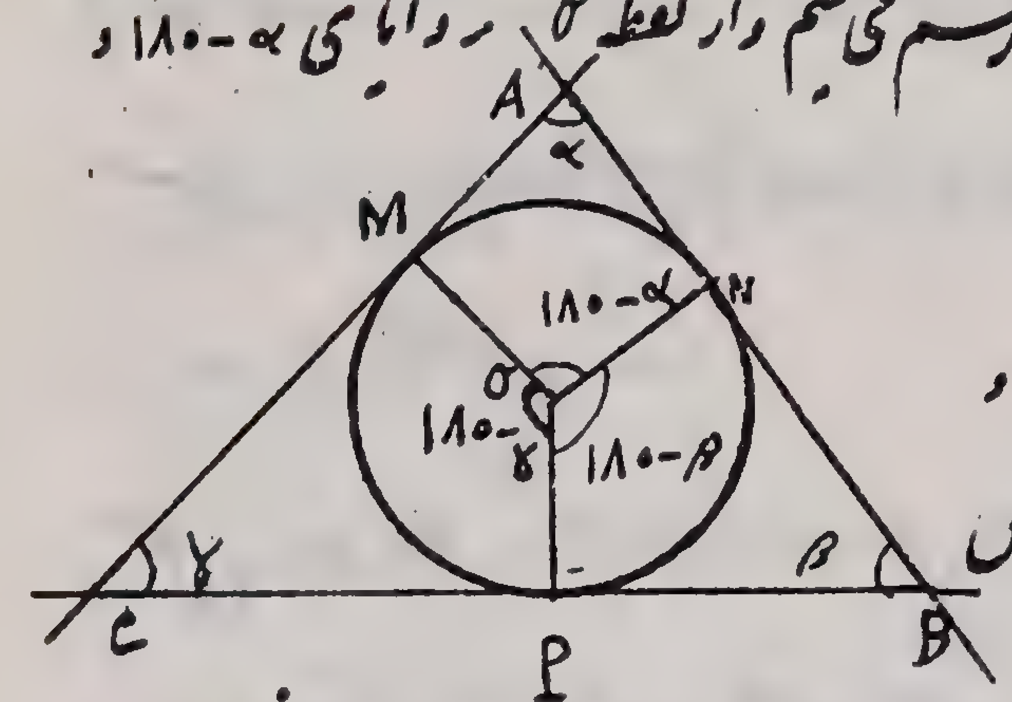
حل ـ از مثلث مطلوب ABC باشد واضحست که زاویه $BOC = 2\alpha$ و $COA = 2\beta$ و $AOB = 2\gamma$ میباشد پس کافیست دایرهٔ بمرکز O و شعاع دایرهٔ



محیطی R رسم نموده زاویه برابر 2α در نقطهٔ O بسازیم و همچنین زاویه COA را مساوی 2β رسم نموده لذا قطعاً زاویه $AOB = 2\gamma$ میباشد پس محل تلاقی هریک از شعاعهای OA و OB و OC با دایره محیطی مفروض رئوس مثلث مطلوب میباشند که همان مثلث ABC است

مسئله ـ از مثلثی زوایای α و β و γ و شعاع دایرهٔ محاطی آن r معلومست مثلث را رسم کنید

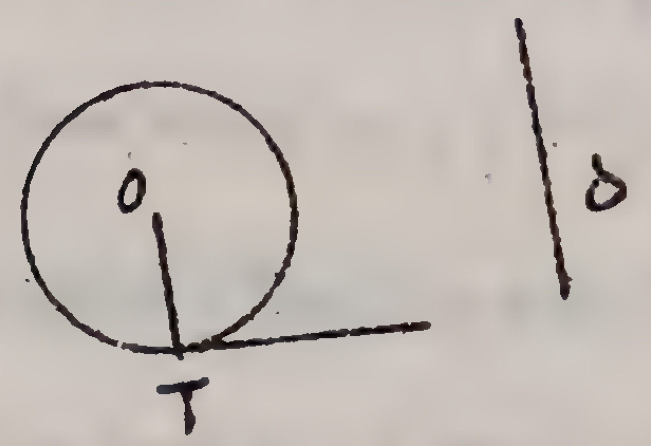
حل ـ دایره O را بشعاع r رسم میکنیم و از نقطهٔ O زوایای $180-\alpha$ و



$180-\beta$ میسازیم هرکجا خطوط ON و OM و OP دایره را قطع کند که نقاط M و N و P هستند خطوطی بر دایرهٔ O مماس میکنیم بدین ترتیب که خط $A\gamma$ را عمود بر ON و خط $\alpha\gamma$ را عمود بر OM . همچنین $\alpha\beta$ را عمود بر OP رسم میکنیم از محل تقاطع این سه خط مثلث مطلوب ABC حاصل میشود

مسئله ـ دایره O و خط L مفروض است بر دایرهٔ مماس عمود بر خط L رسم کنند

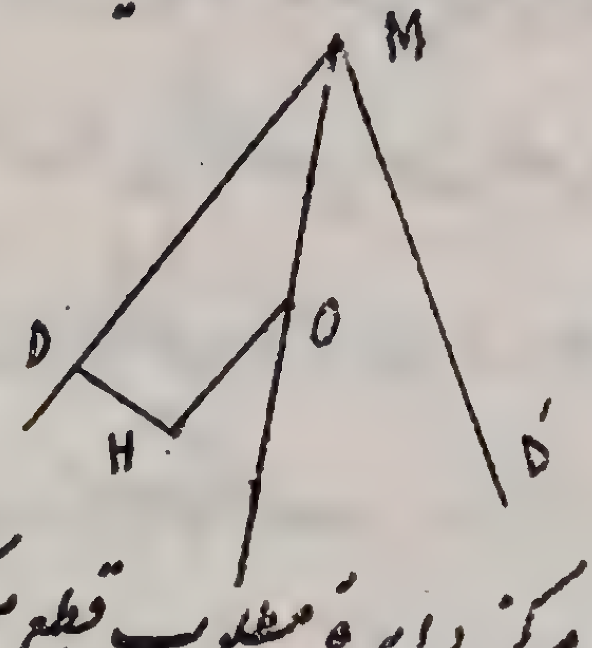
حل ـ از نقطه O مرکز دایره خطی بموازات D رسم میکنیم تا در نقطه T دایره را قطع کند از اینقطه خطی عمود بر OT رسم می کنیم



این خط جواب مسئله است (چرا؟)

مسئله ـ دایرهٔ بشعاع معین R چنان رسم کنید که بر دو خط مماس باشد

حل ـ دو خط مفروض D و D′ را امتداد داده تا در نقطه M یکدیگر را قطع کند

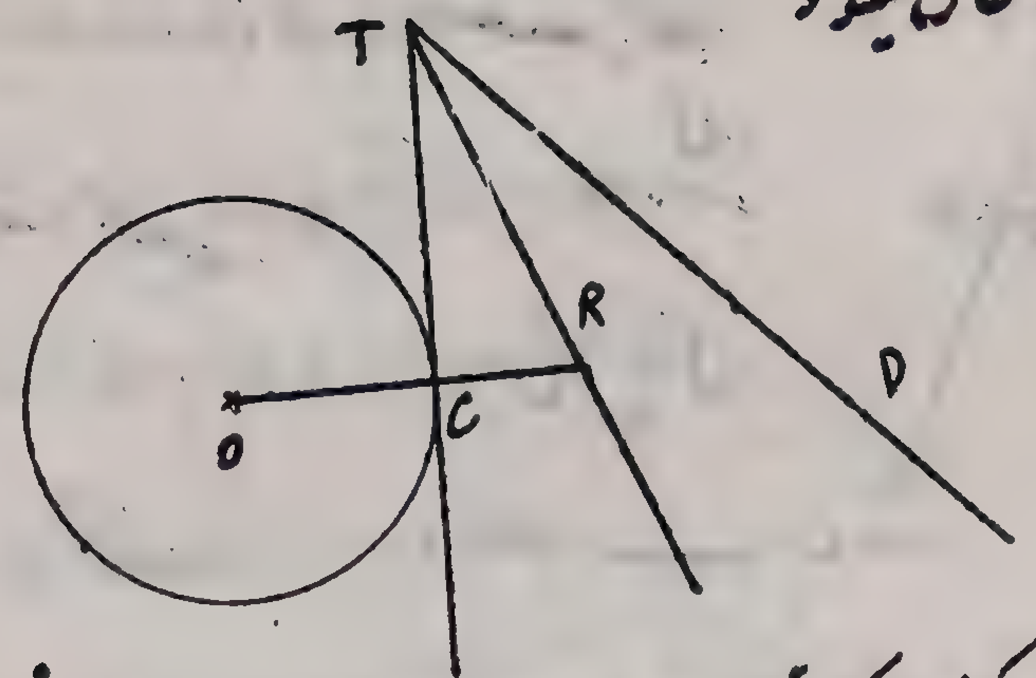


بعد خط OH را عمود بر MD نموده و از آن طول DH = R را جدا نموده خطی بموازات MD از نقطه H رسم می کنیم که خط منصف الزاویه DMD′ را در نقطه O مرکز دایرهٔ مطلوب قطع میکند (چرا؟)

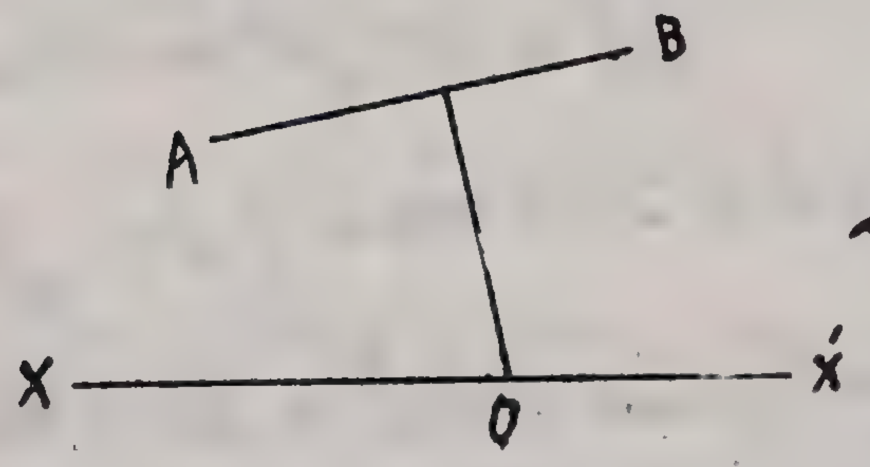
مسئله ـ دایره چنان رسم کنید که بر خط D مماس بوده و در نقطهٔ C با دایره O مماس باشد

حل ـ خط OC را رسم نموده و عمود CT را بر آن وارد می کنیم این خط بر دایره مماس است و مماس مشترک دو دایره خواهد بود پس معلوم میشود که مرکز دایره مطلوب در روی عمود وارد بر CT در نقطه C میباشد و همچنین اگر دو خط D و CT را امتداد دهیم و در نقطهٔ T تقاطع کنند و از طرفی مرکز دایره مطلوب در روی منصف الزاویه T میباشد پس از تلاقی این دو خط نقطه

R مرکز دایرهٔ مطلوب حاصل میشود

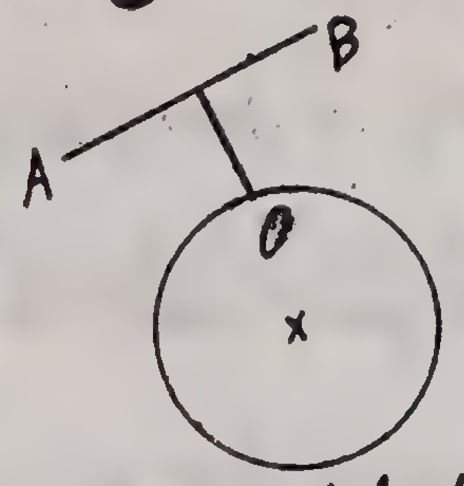


مسئله ـ دایرهٔ چنان رسم کنید که مرکز در روی خط X X′ بوده و از نقاط A و B بگذرد



حل ـ خط AB را وصل نموده میدانیم که این خط وتر دایره مفروض میباشد پس مرکز دایره در روی عمود منصف این خط واقعست پس هر کجا این عمود منصف خط X X′ را قطع کند مرکز دایره مطلوبست

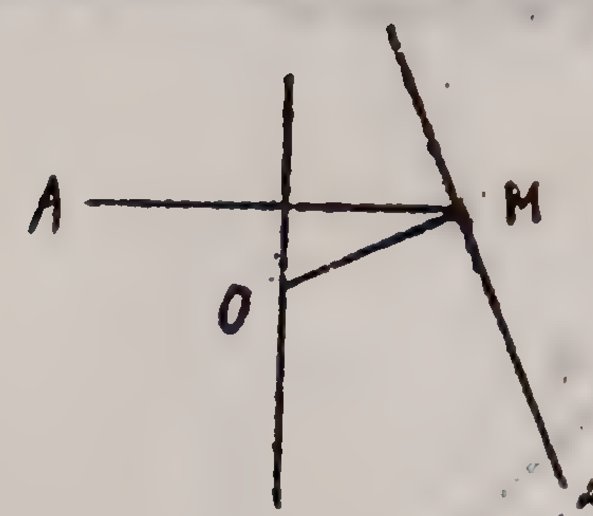
مسئله ـ دایره چنان رسم کنید که از نقاط A و B بگذرد و مرکزش در روی دایره O واقع باشد



حل ـ خط عمود منصف AB را رسم نمود هر کجا دایره O را قطع کرد مرکز دایرهٔ مطلوب خواهد بود.

مسئله ـ دایرهٔ چنان رسم کنید که از نقطه A بگذرد و با خط D در نقطه M مماس باشد

حل از نقطه M به A وصل نموده میدانیم که این وتر دایره مطلوب بوده و

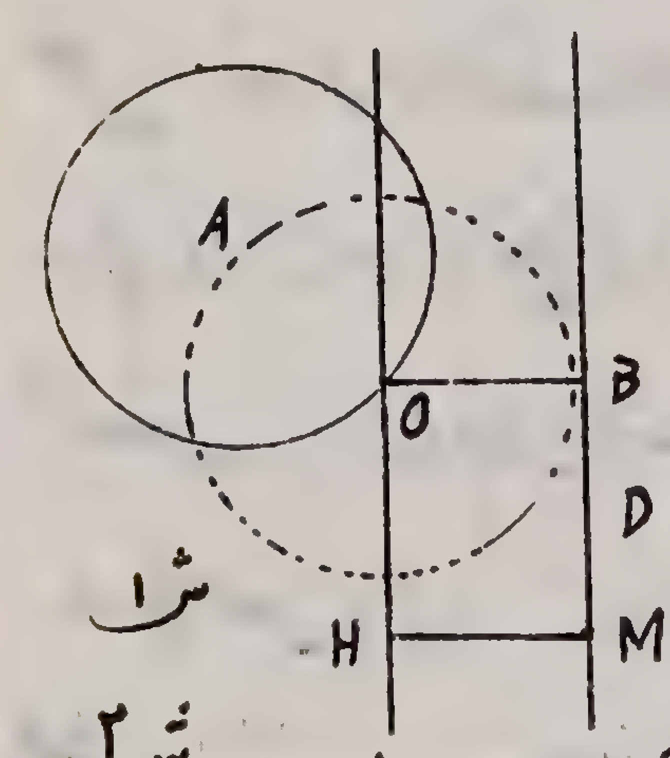


مرکز دایره دررو عمود منصف این
خط میباشد و همچنین از طرفی مرکز دایره درروی
عمودوارد از M برخط D بوده پس محل تلاقی
این دوخط نقطه O مرکز دایره مطلوب میباشد

مسئله ـ دایرهٔ چنان رسم کنید که شعاعش برابر R بوده و باخط D مماس
باشد واز نقطهٔ معینی مانند A بگذرد

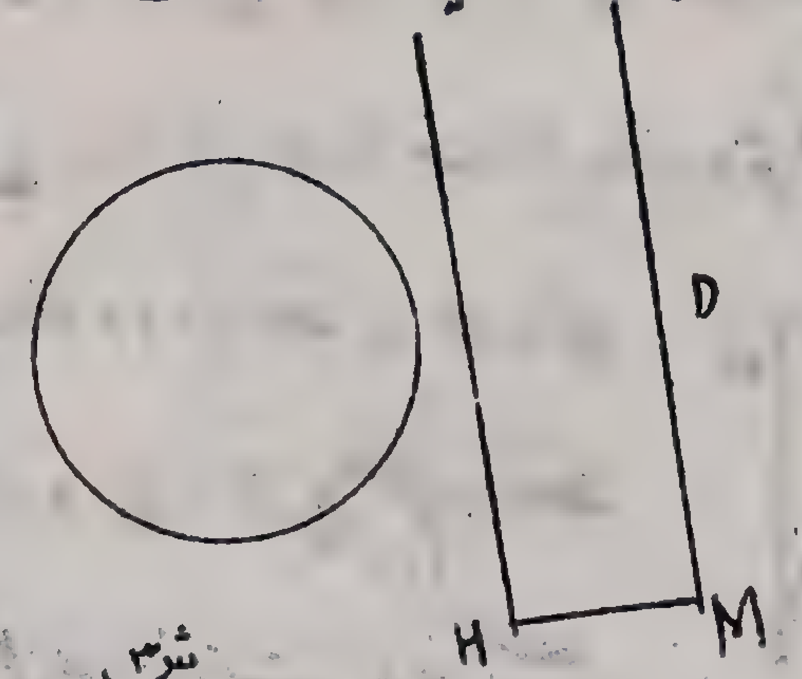
حل ـ بریکی از نقاط خط D مانند M عمود بطول معین R رسم میکنیم مانند
MH واز نقطهٔ H خطی بموازات D رسم میکنیم برکجا دایره بشعاع R که از مرکز
A رسم شده است قطع کند مرکز دایره مطلوب است زیرا جمیع نقاط واقع
درروی دایره بشعاع R ومرکز A از نقطه A بفاصله R میباشند ومحل تلاقی
این دایره با خط HO نیز که بموازات D است از خط D نیز بفاصله R بوده پس نقطه
O از خط D ونقطه A بفاصله R است واز نقطه B برخط D مماس میشود

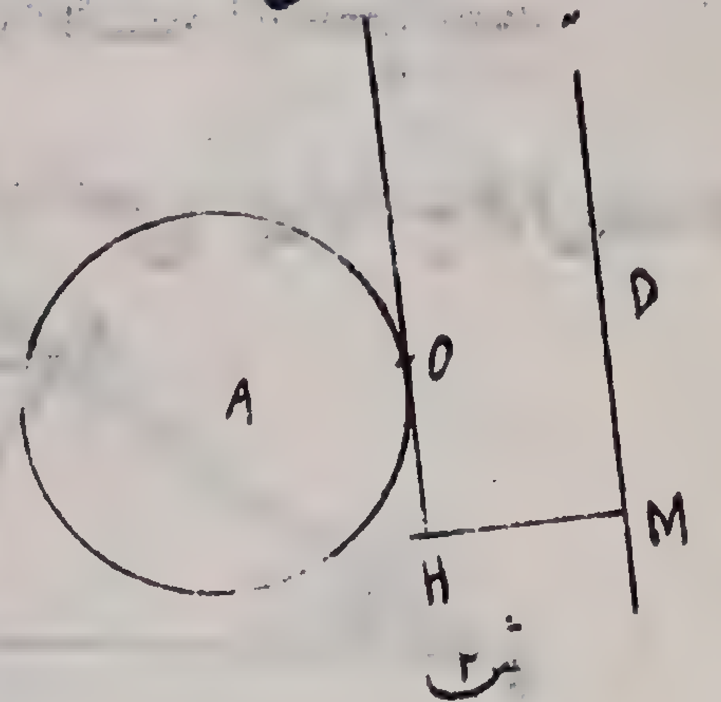
امکان مسئله ـ مسئله وقتی جواب دارد
که این خط OH بتواند دایره را درنقطه O
قطع کند پس اگر در دو نقطه قطع کند مسئله دارای
دو جواب است ش۱ واگر دریک نقطه قطع



کند یعنی با دایره A مماس شود مسئله دارای یک جواب است ش۲

واگر دایره A را قطع نکند مسئله دارای جواب نیست ش۳

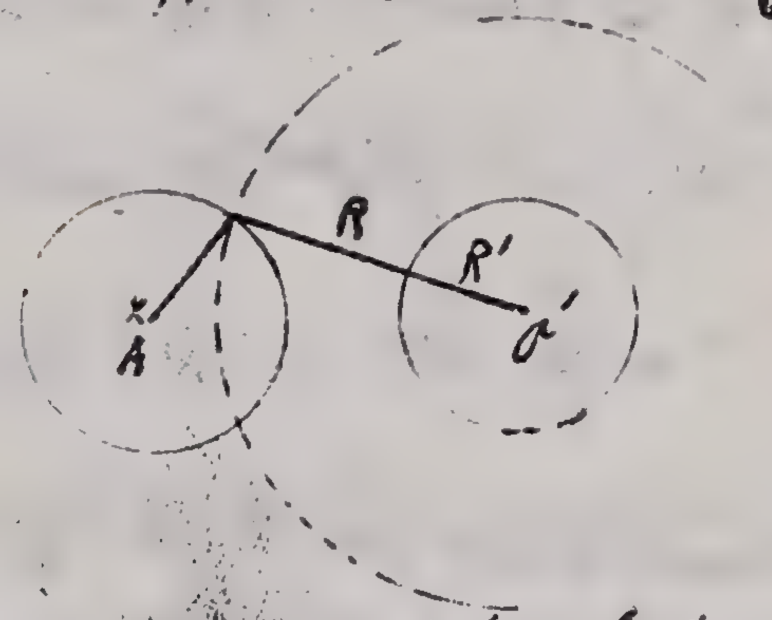




مسئله ـ دایره باشعاع معین R چنان رسم کنید که از نقطه A بگذرد وبادایره
دیگر بشعاع O′ که شعاعش R′ است مماس گردد

حل ـ نقطه A را مرکز قرار داده و دایره بشعاع R رسم میکنیم وبعد نقطه
O′ را مرکز قرار داده بشعاع R + R′ دایره رسم مینمائیم این دایره دایره بمرکز
A را درنقاط M و M′ قطع میکند که هر دو نقاط مرکز دایره مطلوب میباشند ونقاط
تماس دایره مطلوب با دایره O′ محل تقاطع خطوط MO′ و M′O′ با دایره بمرکز
O′ که نقاط T و T′ میباشد

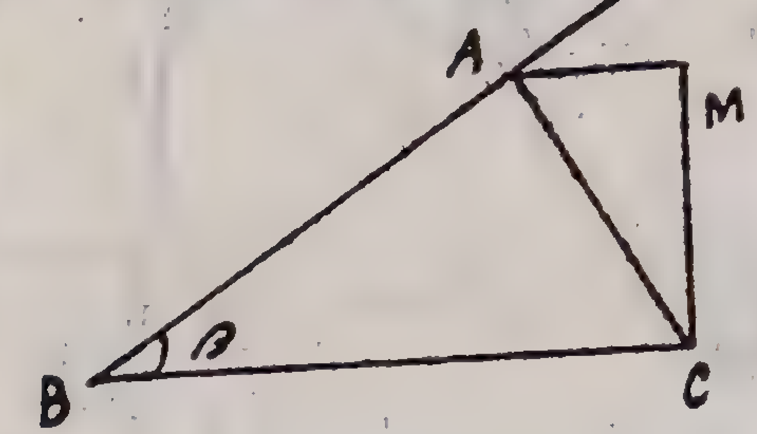
امکان مسئله ـ درصورتیکه دایرهٔ شعاع R + R′ دایره بمرکز A را دونقطه
قطع کند مسئله دارای دو جواب
است و درصورتیکه باآن مماس
گردد یعنی یک نقطه مشترک داشته



باشد مسئله یک جواب دارد واگر آنرا قطع نکند مسئله دارای جواب نیست

مسئله - در مثلثی a و β و h_a معلوم است مثلث را رسم کنید

حل - زاویه β را میسازیم و از روی یکی از اضلاع این زاویه طول $BC=a$ را جدا نموده از نقطه C عمودی باندازه h_a اخراج میکنیم و از نقطه H خطی بموازات BC رسم مینمائیم تا ضلع دیگر زاویه β را در نقطه A قطع کند مثلث ABC مطلوب بدست میآید

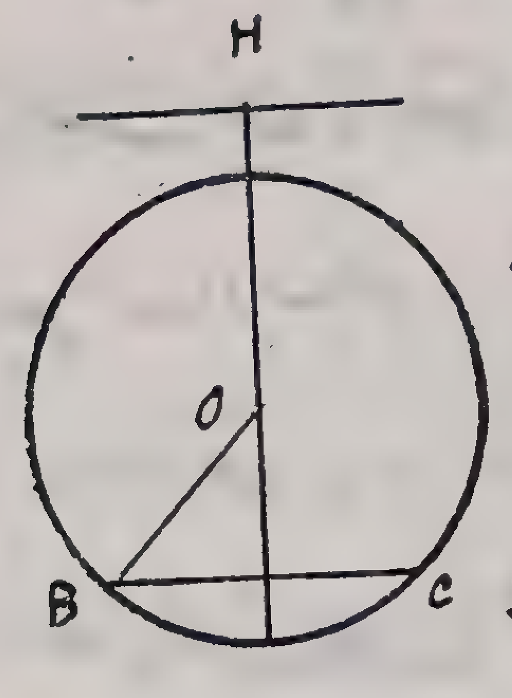


مسئله - از مثلثی a و α و h_a معلوم است مثلث را رسم کنید

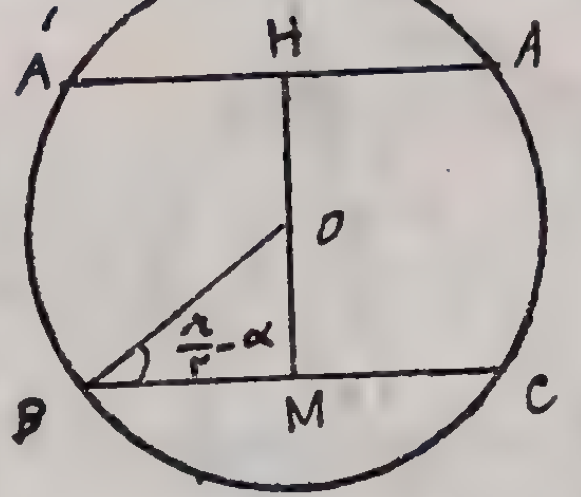
حل - ضلع $BC=a$ را رسم میکنیم و عمود منصف این خط را رسم نموده و از نقطه B خطی چنان رسم می کنیم که با BC زاویه برابر $\frac{\pi}{2}-\alpha$ ایجاد کند و عمود منصف را در نقطه O قطع مینماید که مرکز دایره خواهد بود که هر نقطه X از آن بگیریم و به نقاط B و C وصل کنیم زاویه BXC برابر α خواهد بود (چرا؟) پس اگر از روی عمود منصف طول $MH=h$ را جدا کرده از نقطه H خطی بموازات BC رسم کنیم دایره را در دو نقطه A و A' قطع می کند پس مثلث مطلوب ABC یا A'BC میباشد

امکان مسئله - مسئله دارای یک جواب خواهد بود در صورتیکه خطی را در نقطه H بموازات BC رسم می کنیم بر دایره مماس گردد ش ۲

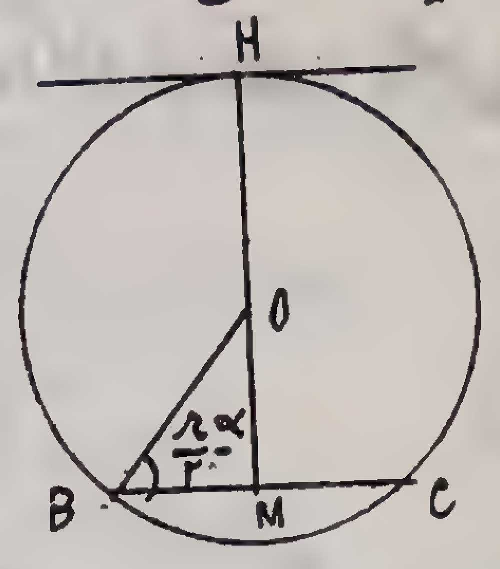
و مسئله جواب ندارد در صورتیکه خط مرسوم از نقطه H بموازات BC دایره را قطع کند ش ۳



ش ۳



ش ۱

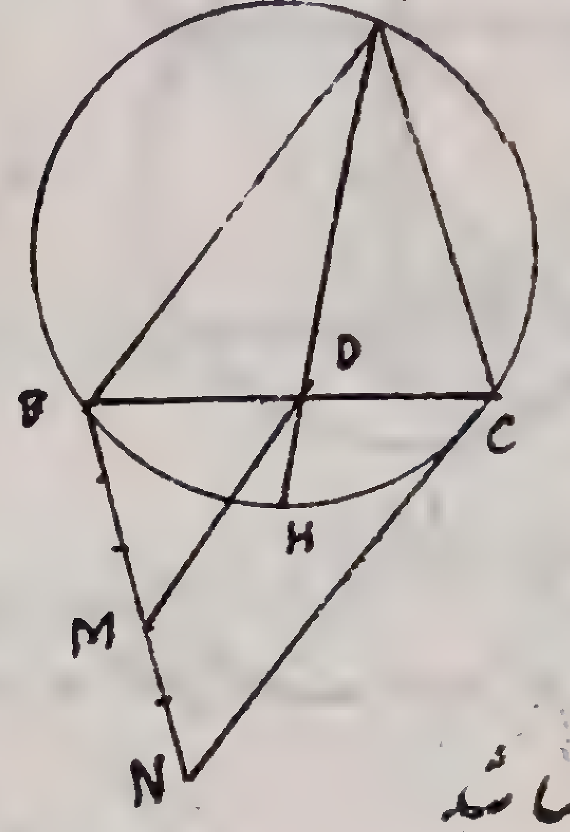


ش ۲

مسئله - از مثلث a و α معلوم است و میدانیم که نسبت دو ضلع دیگرش نسبت $\frac{3}{5}$ است مثلث را رسم کنید

حل - ابتدا ضلع $BC=a$ را رسم میکنیم و از نقطه B خطی چنان رسم می کنیم که با BC زاویه برابر $\frac{\pi}{2}-\alpha$ ایجاد کند این خط قطع می کند عمود منصف BC را در نقطه O که مرکز داده است که هر نقطه x از آن را به B و C وصل کنیم زاویه $BXC=\alpha$ میباشد حال از نقطه B خطی غیر مشخص رسم نموده و در روی آن BM را مساوی ۳ و MN را مساوی ۵ واحد قیاسی جدا کرده از نقطه C به N وصل نموده و از اینقطه M خطی بموازات NC رسم میکنیم این خط BC را از نقطه D قطع می کند بطوریکه نسبت $\frac{DC}{DB}=\frac{3}{5}$ پس ما خطی می کشیم که اگر مثلث مطلوب مثلث ABC باشد نسبت $\frac{DC}{DB}=\frac{3}{5}$ میفهماند که نقطه D محل تلاقی منصف الزاویه AD از رأس A با ضلع BC باشد زیرا آنوقت

$\frac{3}{5}=\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB}$ است پس چون منصف الزاویه قوس مقابل
را نیز نصف میکند لذا نقطه H وسط قوس BC را پیدا کرده به نقطه D وصل
می‌کنیم امتداد میدهیم
تا دایره را در نقطه A
که راس مثلث مطلوب
است قطع کند پس مثلث
مطلوب مثلث ABC میباشد



مسئله ـ دایره رسم کنید که از نقطه A و B بگذرد و مرکزش درروی خط D باشد
مسئله ـ درروی خط D نقطه چنان پیداکنید که مماس های وارد ازاین نقطه بر دایره مفروض طول معینی l را دارا باشند
مسئله ـ درروی دایره O نقطه پیداکنید که مماسهای مرسوم از نقطه بر دایره مفروض طول معینی دارا باشد
مسئله ـ مماس بر دایره مفروض چنان رسم کنید که با خط مفروض زاویه معینی ایجاد کند
مسئله ازنقطه A خارج دایره O قاطع AC را چنان رسم کنید که قطعه BC واقعه دردرون دایره طول معلوم a را دارا باشد

مسئله ـ ثابت کنید که دو وتر موازی مرسوم از دو انتهای قطر مساوی هستند
مسئله ـ ثابت کنید که مجموع دو قطر دایره محیطی و محاطی مثلث قائم الزاویه برابر است با مجموع دو ضلع مجاور زاویه قائمه
مسئله ـ دو دایره در نقاط A و B بایکدیگر تقاطع می‌کنند از هریک ازاین نقاط قاطع مشترکی رسم میکنیم ثابت کنید که خطوط واصل بین انتهای آنها در هر دایره موازی هستند
مسئله ـ دو دایره O و O′ درنقاط A و B تقاطع می‌کنند از نقطه A قاطع مشترک CAD را رسم میکنیم ثابت کنید که مثلث CBD متساوی الساقین است
مسئله ـ مثلث ABC و دو دایره بقطر AB و AC مفروض اند در دایره اولی قطر EF را موازی AC و در دایره دومی قطر GH را موازی AB رسم می‌کنند ثابت کنید که انتهای این اقطار درروی منصف الزاویه A واقعند
مسئله ـ مثلث ABC مفروض است درروی امتداد BC ضلع BB′ را مساوی BA و CC′=CA جدا نموده واز نقاط A و B′ و C′ دایره بمرکز O رسم می‌کنند ثابت کنید که خط AO منصف الزاویه $B\hat{A}C$ است
مسئله ـ دو دایره O و O′ مماس خارج مفروض است ثابت کنید که مماس مشترک خارجی آنها مماس است بر دایره بقطر OO′

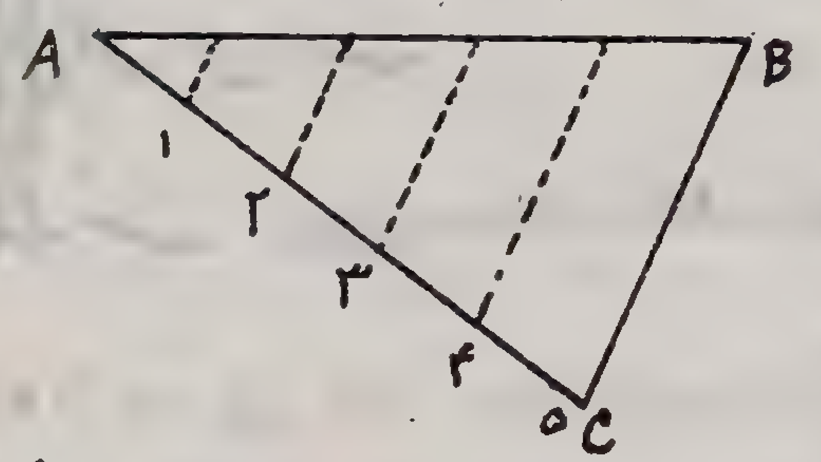
مسئله - مطلوبست مکان هندسی مراکز دوایر باشعاع مفروض و مماس بر خط D

مسئله - مطلوبست مکان هندسی مراکز دوایر بشعاع مفروض و مماس بدایرهٔ O

مسئله - دایره بشعاع R مفروض است در روی امتداد وتر AB طول R = BC را جدا کرده و قطر CDE را رسم می کنند ثابت کنید که قوس AE سه برابر قوس BD است

مسئله - خط مستقیم AB را به پنج قسمت متساوی تقسیم کنید

حل - از نقطه A خط غیر مشخص AC را رسم می کنیم و در روی این خط ۵ قسمت متساوی جدا نموده بعد نقطه B را به C وصل نموده واز هرکدام از نقاط تقسیم خطی

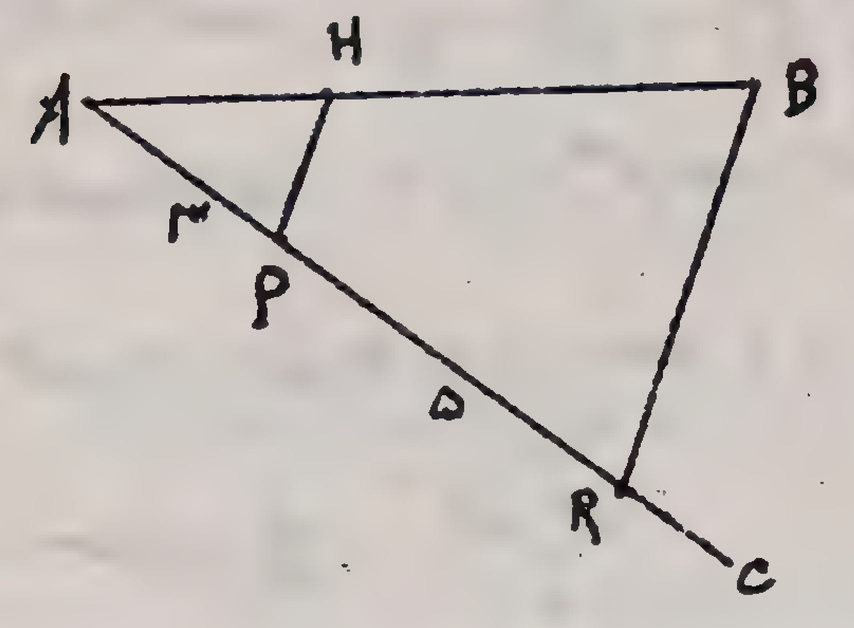


بموازات BC رسم میکنیم این خطوط AB را به ۵ قسمت متساوی تقسیم می کنند

مسئله - مستقیم AB مفروض است میخواهیم این خط را بدو قسمت چنان تقسیم کنیم که نسبت آندو قطعه مثل $\frac{۳}{۵}$ باشد

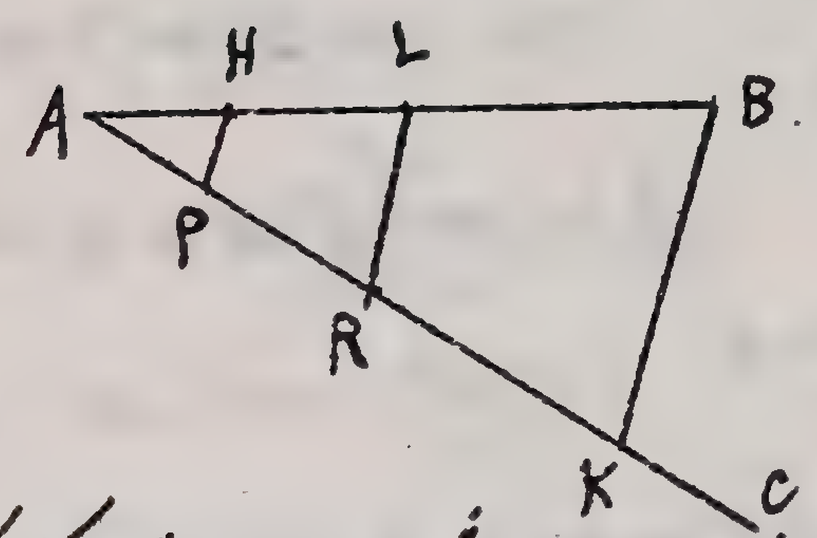
حل خط غیر مشخص AC را رسم مینمائیم و در روی آن طول AP مساوی ۳ و PR مساوی ۵ را نقل کرده واز نقطه B به R وصل میکنیم واز نقطه P بموازات BR رسم کرده تا خط AB را در نقطه H قطع کند پس دو قطعه مطلوب

AH و BH است زیرا در مثلث ARB که PH بموازات BR است میتوان نوشت $\frac{AP}{PR}=\frac{AH}{HB}=\frac{۳}{۵}$



مسئله - خط مستقیم AB را به قسمتهائی متناسب با اعداد ۲ و ۳ و ۵ تقسیم کنید

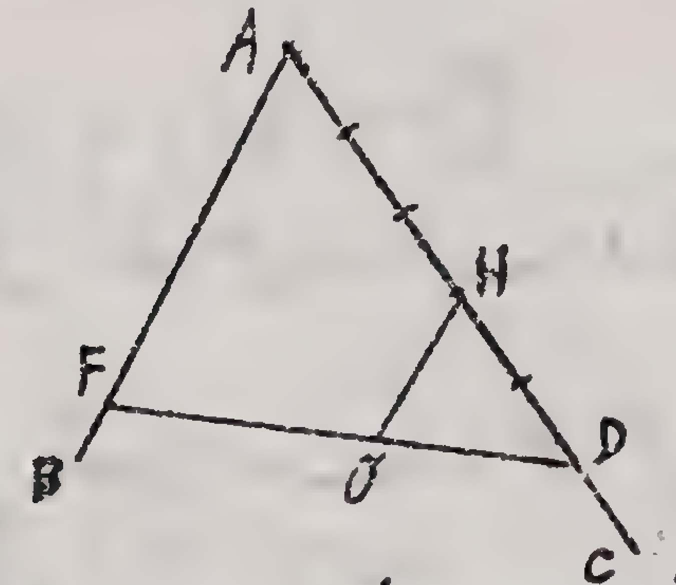
حل خط غیر مشخص AC را رسم میکنیم و در روی این خط قطعات AP=۲ و PR=۳ و RK=۵ را نقل کرده از نقطه B به K وصل مینمائیم واز نقاط R و P



خطوطی بموازات BK رسم کرده تا خط AB را در نقاط H و L قطع میکند که نقاط مطلوب است

مسئله - زاویهٔ A مفروض است و نقطه O در درون آن از این نقطه خطی چنان رسم کنید که بوسیله دو ضلع زاویه به نسبت اعداد ۲ و ۳ قطع شود

حل - از نقطه O خطی بموازات AB رسم میکنیم بعد AH را به ۳ قسمت و از H به طرف پائین

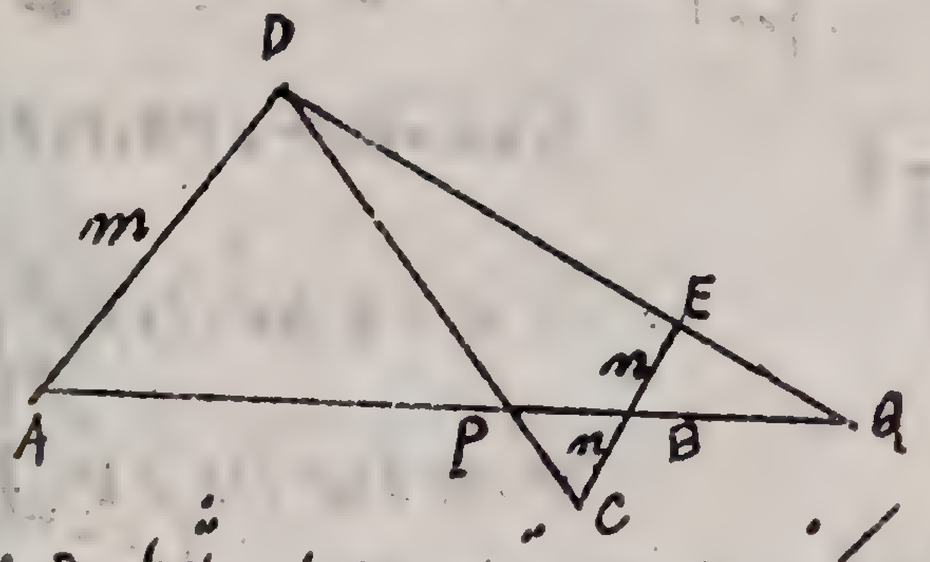


را نیز بدو قسمت برابر قسمتهای اول جدا میکنیم تا D بعد از نقطه O به D وصل کرده

امتداد میدهیم خط AB را در نقطهٔ F قطع میکند واضح است که در مثلث DAF میتوان نوشت $\frac{DH}{HA}=\frac{DO}{OF}=\frac{2}{3}$ پس خط FD در نقطهٔ O دو جزء متناسب با اعداد ۲ و ۳ تقسیم شده است

مسئله - در روی خط AB دو نقطهٔ P و Q چنان تعیین کنید که خط مفروض را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کند

حل - در نقاط A و B دو خط AD و BC را بموازات یکدیگر رسم میکنیم و AD را مساوی m و BC را



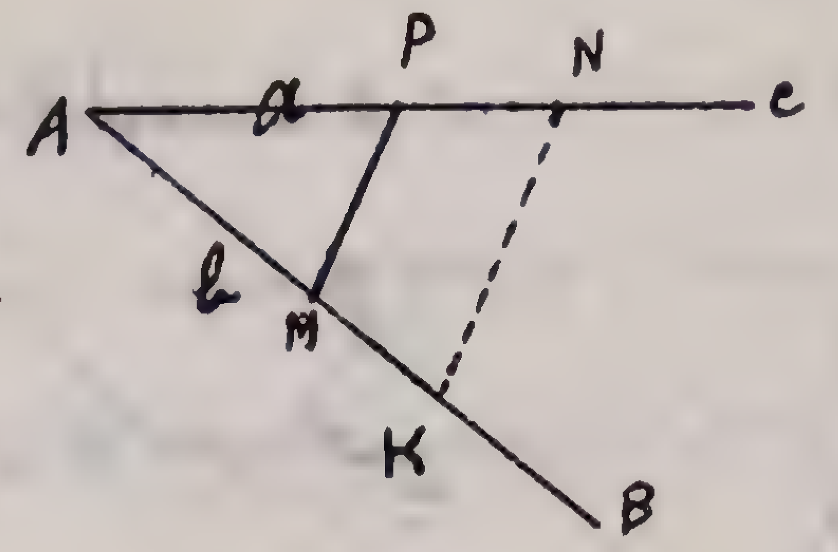
مساوی n جدا میکنیم و از طرفی نیز BC را امتداد میدهیم و BE را مساوی n از آن جدا میکنیم خط DC قطعه AB را در نقطه P و خط DE نیز خط AB را در نقطه Q که نقاط مطلوب هستند قطع می کنند زیرا از تشابه دو مثلث PAD و PBC میتوان نوشت $\frac{PA}{PB}=\frac{AD}{BC}=\frac{m}{n}$ و همچنین از تشابه دو مثلث QAD و QBE میتوان نوشت

$$\frac{QA}{QB}=\frac{AD}{BE}=\frac{m}{n}$$

مسئله - قطعه خطی متناسب با طولهای a و b و c پیدا کنید رابطهٔ $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$

حل - مقصود اینست که ما میخواهیم این رابطهٔ $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ با مین چهار قطعه خط برقرار باشد. یک زاویه غیر مشخص ABC را میسازیم و در روی AB طول $b=AM$

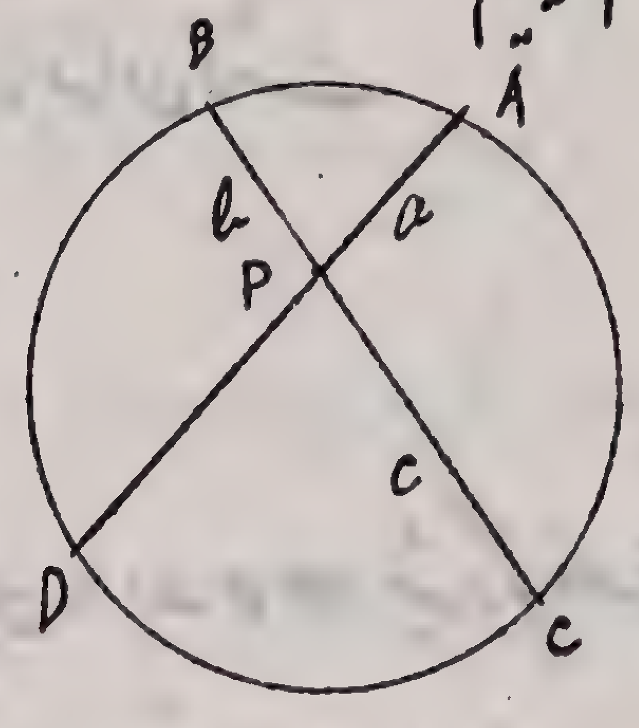
و در روی AC طول $a=AP$ و AN



برابر c را نقل میکنیم از نقطه P به M وصل می کنیم و از نقطه N بموازات MP خطی رسم میکنیم تا AB را در نقطه K قطع کند پس خط بطول x مطلوب که چهارم جزء متناسب باشد خط AK میباشد زیرا

$\frac{AP}{AM}=\frac{AN}{AK}$ یعنی $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ محقق است

راه حل دوم - دو خط متقاطع رسم میکنیم BP را مساوی b

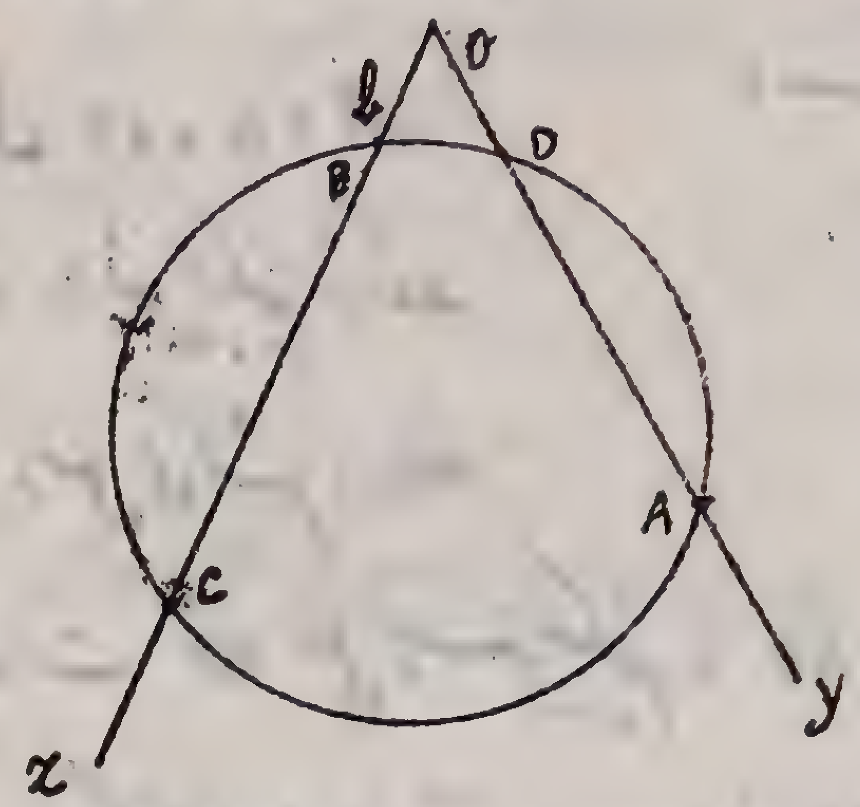


و PC را مساوی c از آن جدا میکنیم همچنین AP را برابر a جدا کرده بر ۳ نقطه ABC دایرهٔ مرور میدهیم این دایره امتداد AP را در نقطهٔ مانند D قطع میکند پس طول مطلوب x برابر است با PD زیرا در این دایره میتوان نوشت $PB\times PC=PA\times PD$

و چون مقادیرشان را قرار دهیم میشود $b\times c=a\times PD$ و یا $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$

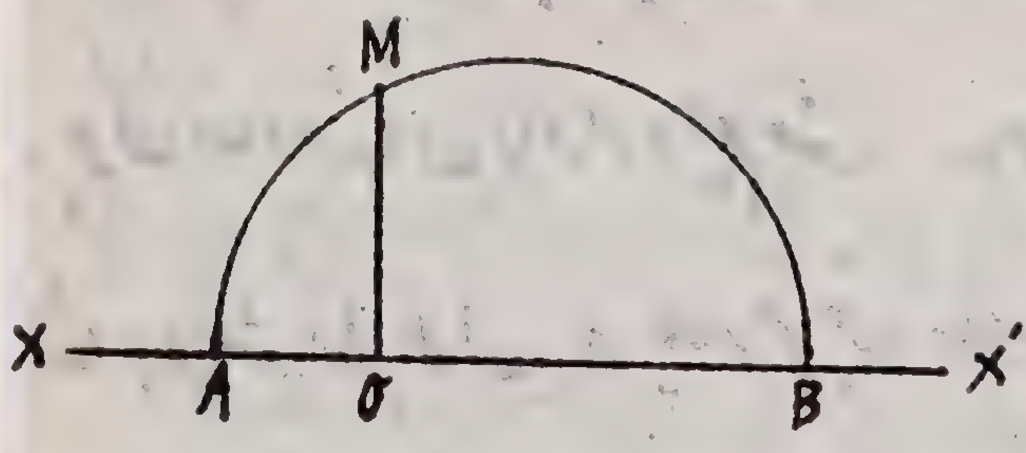
مشاهده میشود که طول x چهارم جزء متناسب واقع شد

حل - طریقهٔ سوم - زاویه xOy را رسم میکنیم در روی Ox دو طول



دو طول $OB = b$ و
$OC = c$ را
جدا می‌کنیم و همچنین
در روی OY طول OA
مساوی a را نقل
می‌کنیم حال دایره که بر این نقطه ABC مرور کند خط OY را در نقطه D
بطوریکه $OD = x$ مطلوبست قطع میکند زیرا
همواره میتوان نوشت $OB \times OC = OD \times OA$
یعنی $b \times c = x \times a$
یا $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$
از این رابطه ملاحظه میشود که قطعه خط مطلوب که میتواند جزء چهارم
تناسب باشد OD است

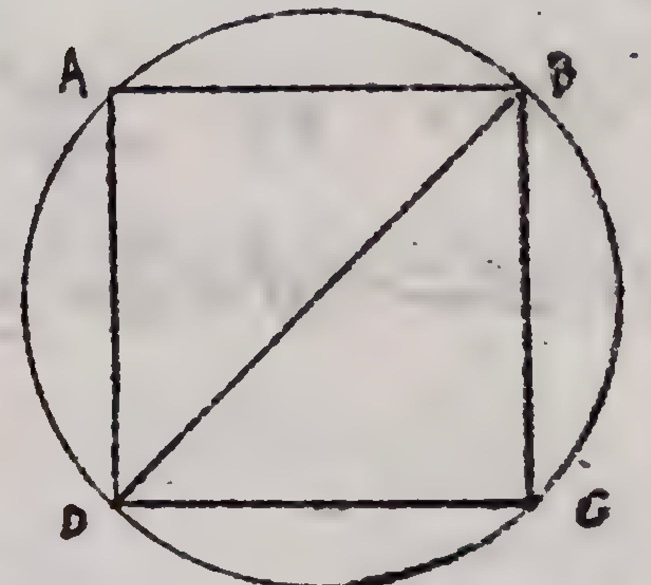
مسئله ـ قطعه خط واسطه هندسی خطوط $OA = a$ و $OB = b$ را رسم کنید



حل ـ در روی خط XX'
دو طول OA و OB را
نقل میکنیم و بقطر AB دایره
رسم نموده عمود وارد بر AB در نقطه O هر کجا دایره را قطع کرد مثلا

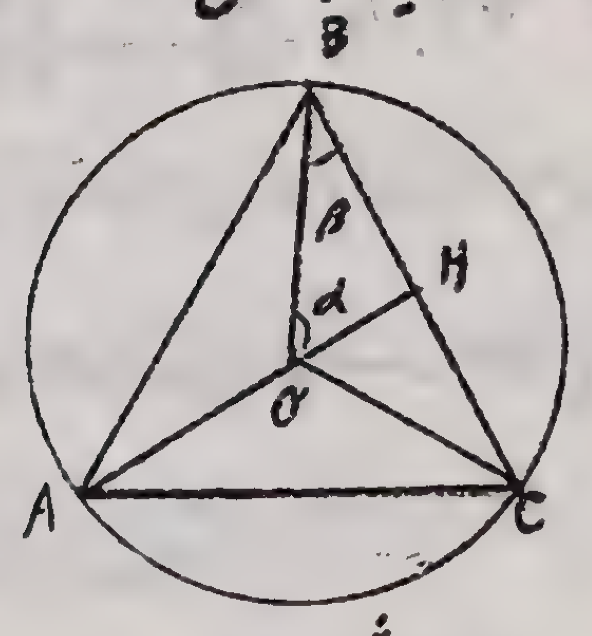
M گوئیم OM واسطه هندسی OA و OB میباشد یعنی $OM^2 = OA \times OB$
زیرا اگر از M به A و B وصل کنیم مثلث AMB قائم الزاویه بوده و در مثلث قائم الزاویه
ارتفاع وارد از رأس زاویه قائمه بر وتر واسطه هندسی است مابین دو قطعه که این
ارتفاع از وتر جدا می‌کند بنابراین $OM^2 = a \times b$

مسئله ـ در دایره O بشعاع R مطلوبست محاسبه ضلع مربع محاطی



حل ـ میدانیم که اگر قطر BD
از مربع را رسم کنیم از مرکز
دایره میگذرد و لذا در مثلث
قائم الزاویه DAB میتوان
نوشت $BD^2 = AB^2 + AD^2$ اما چون شکل مربع و $AB = AD$ است پس
$BD^2 = 2AD^2$ یعنی اگر AD ضلع مربع مساوی x باشد و شعاع چون R است پس
$4R^2 = 2x^2$ یعنی $x^2 = 2R^2$ و از آنجا $x = R\sqrt{2}$

مسئله ـ مطلوبست محاسبه ضلع مثلث محاطی در دایره بشعاع R



حل ـ مثلث متساوی الاضلاع
محاطی ABC را ملاحظه می‌کنیم که
هر کدام از زوایای BOC و
COB و AOB برابر 120° میباشند و چون ۳ مثلث BOC و COA و AOB

تساوی هستند پس خط OH منصف الزاویه راس A و ضلع BC را نیز نصف میکند و بر آن عمود است (چرا؟) و چون در مثلث قائم الزاویه OHB زاویه $\alpha = 60$ درجه و $\beta = 30$ درجه است پس طول OH برابر نصف وتر OB یعنی $\frac{R}{2}$ است لذا میتوان در مثلث OHB رابطه ذیل را نوشت $BH^2 = OB^2 - OH^2$

و یا $BH^2 = R^2 - (\frac{R}{2})^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{4R^2 - R^2}{4}$

یعنی $BH^2 = \frac{3R^2}{4}$ و مقدار $BH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ اما چون BH برابر نصف ضلع مثلث محاطی است پس دو برابر آن ضلع مطلوب میباشد یعنی

$$BC = R\sqrt{3}$$

مسئله - مثلث ABC باضلاع $AB = 24$ سانتیمتر و $AC = 32$ سانتیمتر مفروض است AD را مساوی ۱۵ متر از روی AB جدا میکنیم مطلوبست طول AE بطریقی که DE موازی BC باشد

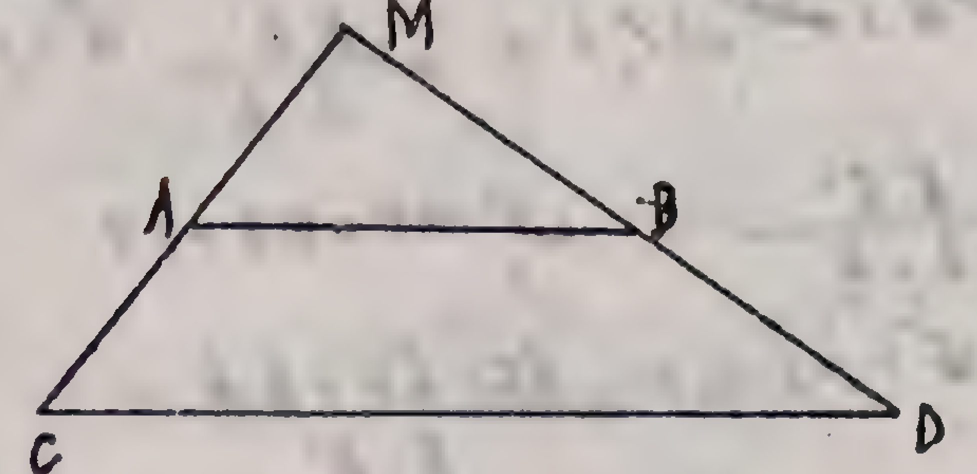
حل - اگر بخواهیم DE موازی BC باشد باید تناسب ذیل محقق باشد

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ و از آنجا $\frac{24}{15} = \frac{32}{x}$ $x = 20$

مسئله - قاعدتین ذوذنقه به ترتیب ۱۲ و ۸ متر و طول دو ساق آن ۳ و ۵ متر میباشد مطلوبست محاسبه اضلاع مثلث MCD که از امتداد دو ساق این ذوذنقه بدست میآید

حل - یکی از اضلاع مثلث که همان $CD = 12$ متر است پس مقصود

محاسبه MC و MD میباشد لذا گوئیم چون خط AB موازی CD است پس



$$\frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MD} = \frac{AB}{CD}$$

و یا پس از تفصیل نسبت میتوان چنین نوشت $\frac{MA}{MC-MA} = \frac{MB}{MD-MB} = \frac{AB}{CD-AB}$

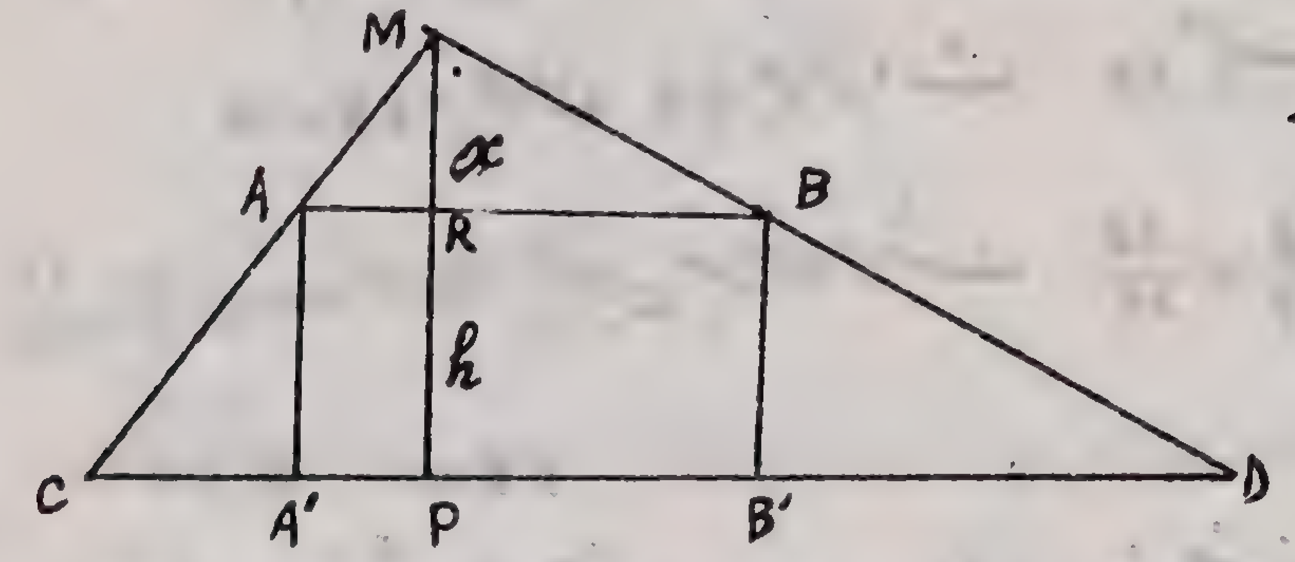
و چون $3 = MC - MA = AC$ و $MD - MB = BD = 5$ متر

و $AB = 8$ و $CD = AB = 4$ پس $\frac{MA}{3} = \frac{MB}{5} = \frac{8}{4}$

و از آنجا $MA = \frac{3 \times 8}{4} = 6$ و $MB = \frac{5 \times 8}{4} = 10$ بنابراین $MC = 6+3 = 9$ و $MD = 10+5 = 15$

مسئله - ذوذنقه ABCD مفروض است اضلاع AC و BD را امتداد داده تا در نقطه M یکدیگر را قطع کنند مطلوبست محاسبه ارتفاع مثلث MCD در صورتیکه میدانیم $l' = AB$ و $l = CD$ ارتفاع ذوذنقه برابر h میباشد

حل - نظر به تشابه دو مثلث MAR و AA'C میتوان نوشت



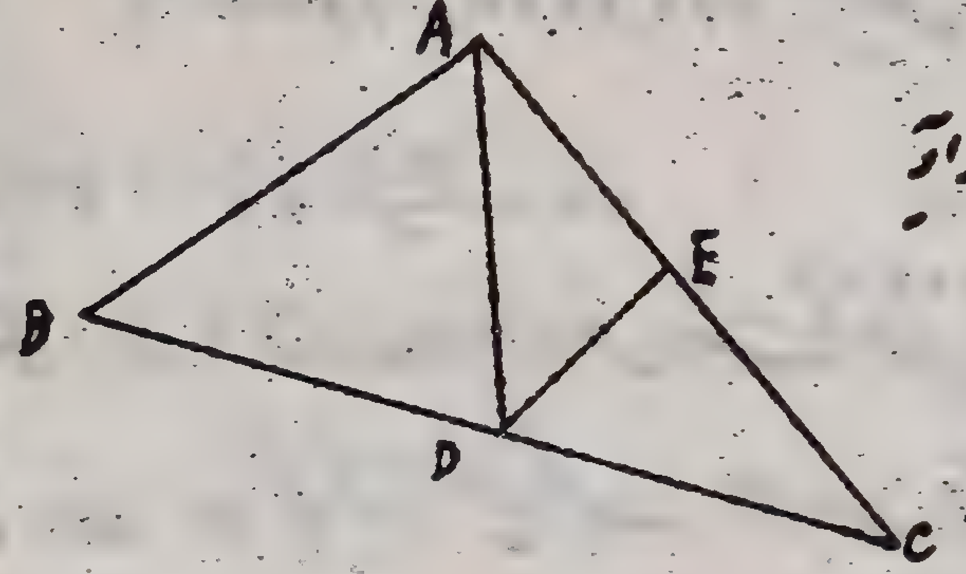
$\frac{MR}{AA'} = \frac{AR}{CA'}$ و همچنین میتوان نوشت $\frac{MR}{BB'} = \frac{BR}{DB'}$ یعنی

$\frac{x}{h} = \frac{AR}{CA'}$ و $\frac{x}{h} = \frac{BR}{DB'}$ پس $\frac{AR}{CA'} = \frac{BR}{DB'} = \frac{x}{h}$

که میتوان چنین نیز نوشت $\frac{x}{h} = \frac{AR+BR}{CA'+DB'}$ یعنی $\frac{l'}{l-l'} = \frac{x}{h}$

$\frac{h l'}{l-l'} = x$ و از آنجا و چون مقصود محاسبه MP است و MP = MR + RP پس $MP = h + \frac{h l'}{l-l'}$ و یا $MP = \frac{hl - hl' + hl'}{l-l'}$ و از آنجا $MP = \frac{h l}{l-l'}$

مسئله - در مثلث ABC اضلاع BC = ۱۵ سانتیمتر و AC = ۲۴ و AB = ۱۲ سانتیمتر منصف الزاویهٔ راس A را رسم میکنیم تا در نقطه D ضلع BC را قطع نماید و از این نقطه خط DE را بموازات AB رسم نموده مطلوبست محاسبه قطعات BD و CD و DE و CE و AE



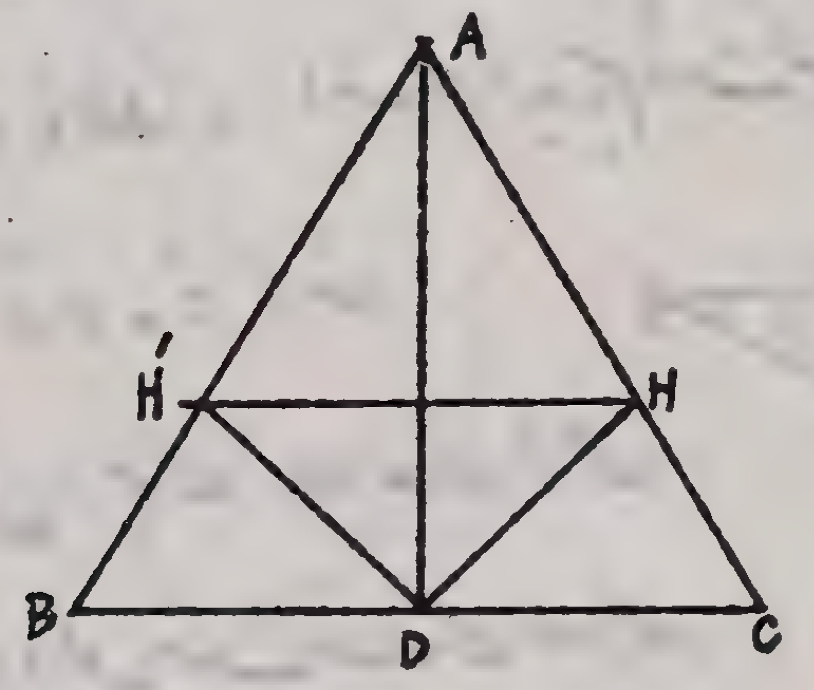
حل - نظر بخاصیت منصف الزاویه AD میتوان نوشت $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ و یا $\frac{۱۲}{۲۴} = \frac{DB}{DC}$ یعنی $\frac{DB}{DC} = \frac{۱}{۲}$ و یا DC = ۲DB پس $DB = \frac{BC}{۳} = \frac{۱۵}{۳}$ یعنی DB = ۵ و چون DE بموازات AB رسم شده پس $\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE}$ و $\frac{۱۵}{۱۰} = \frac{۲۴}{CE}$ و AE=۲۴-۸=۱۶ و همچنین میتوان نوشت $\frac{CB}{CD} = \frac{AB}{DE}$ پس $\frac{۱۵}{۱۰} = \frac{۱۲}{DE}$ و از آنجا DE = ۸

مسئله - دو مثلث متشابه ABC به A'B'C' مفروضند مطلوبست محاسبه اضلاع مثلث ABC در صورتیکه محیطش ۶۴ متر و اضلاع مثلث A'B'C' به ترتیب ۳ و ۵ و ۸ میباشد

حل - چون دو مثلث مفروض متشابه هستند پس میتوان نسبت اضلاع نوشت بدین ترتیب $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ و یا میتوان بدینصورت نیز بنویسیم $\frac{AB+BC+AC}{A'B'+B'C'+A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ یعنی $\frac{۶۴}{۱۶} = \frac{AB}{۸}$ و از آنجا AB = ۳۲ و همچنین $\frac{۶۴}{۱۶} = \frac{BC}{۵}$ پس BC = ۲۰ و همچنین $\frac{۶۴}{۱۶} = \frac{AC}{۳}$ و از آنجا AC = ۱۲

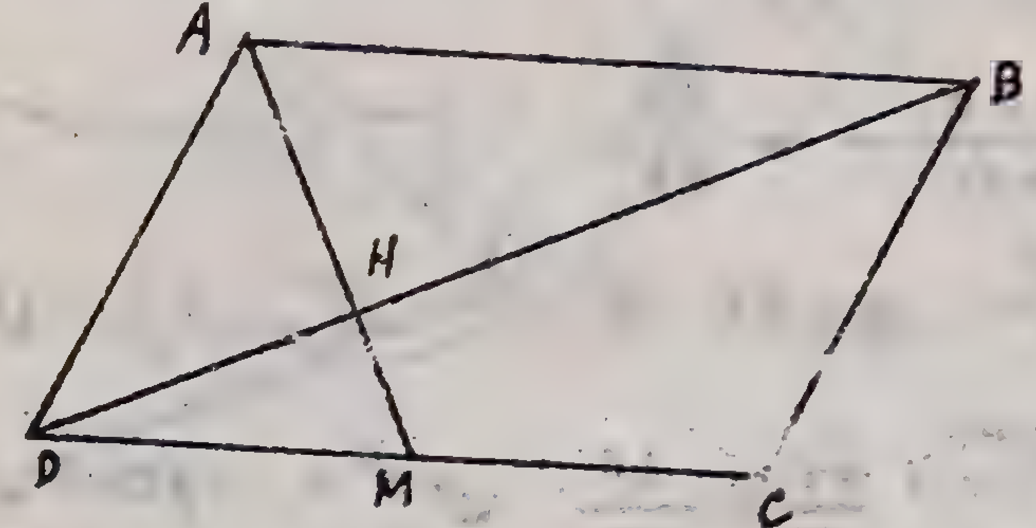
مسئله - در مثلث ABC میانه AD را رسم میکنیم و دو منصف الزاویه DH و DH' را از مثلث های ADC و ADB رسم نموده ثابت کنید که خط HH' بموازی BC میباشد

حل - گوئیم چون خط DH منصف الزاویه زاویه ADC میباشد پس میتوان نوشت $\frac{AD}{DC} = \frac{AH}{HC}$ و همچنین $\frac{AD}{DB} = \frac{AH'}{H'B}$ اما چون DB = DC است چون AD میانه فرض شده



پس طرف اول دو نسبت باهم مساوی شده لذا طرف ثانی آنها نیز مساوی میباشد یعنی $\frac{AH}{HC} = \frac{AH'}{H'B}$ و از تساوی اینها لازم میآید که BC بموازات HH' باشد زیرا در صورت موازی نبودن چنین نسبتی نخواهیم داشت

مسئله - ثابت کنید که در متوازی الاضلاع $ABCD$ خط واصل بین راس A و M وسط ضلع DC قطر BD را در نقطه H طوری قطع می کند که $DH = \frac{BD}{3}$ است

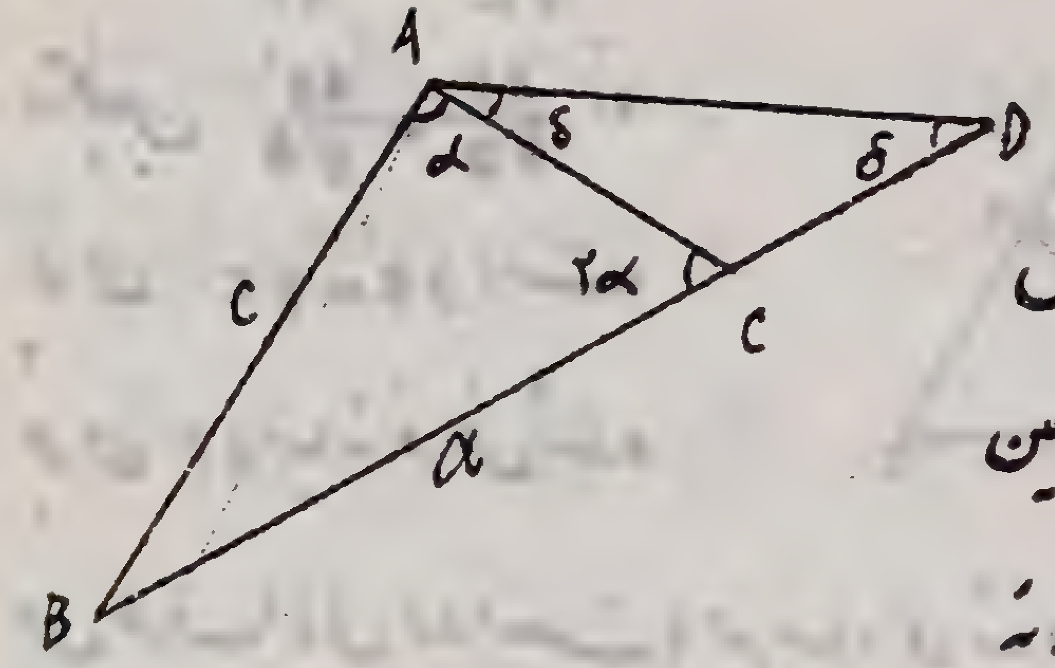


حل - دو مثلث AHB و DHM متشابه‌اند زیرا ...

لذا از تشابه آنها نسبت اضلاع نتیجه میشود $\frac{BH}{DH} = \frac{AB}{DM}$ اما چون $2DM = AB$ میباشد پس $\frac{BH}{DH} = 2$

و از آنجا $BH = 2DH$ یعنی $DH = \frac{BH}{2}$ لذا معلوم میشود که DB در نقطه H به نسبت ۲ و ۱ قسمت شده یعنی $DH = \frac{DB}{3}$

مسئله - مثلث ABC باضلاع a و b و c مفروض است ضلع BC را باندازه AC تا نقطه D امتداد میدهیم ثابت کنید که $AD = \frac{bc}{a}$ در صورتیکه $\hat{C} = 2\hat{A}$ باشد



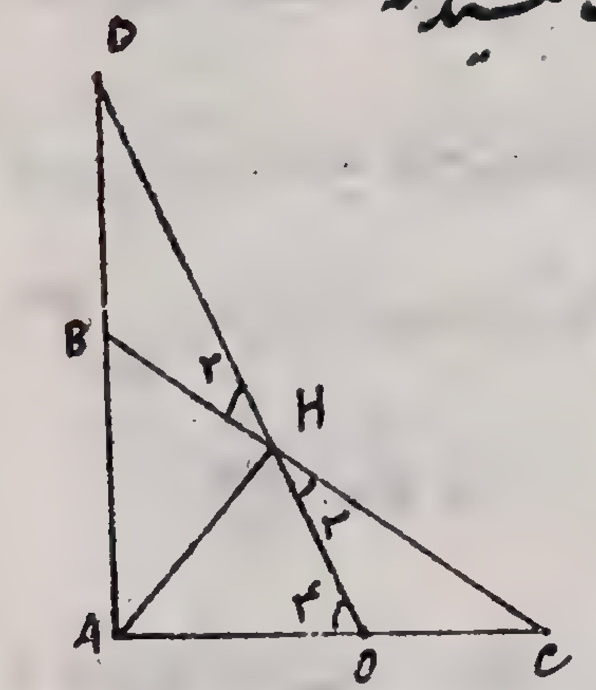
حل - چون $AC = DC$ فرض شده پس مثلث متساوی الساقین است و از طرفی نظر باینکه زاویه $\hat{C}$ خارجه است برابر است با 2δ و اگر زاویه براس A را مساوی α فرض کنیم پس زاویه $C = 2\delta$ مطابق فرض میشود لذا بسهولت میتوان فهمید که زوایای α و δ متساوی هستند زیرا $2\delta = 2\alpha$ پس $\delta = \alpha$

از اینجا معلوم میشود که ضلع AC منصف الزاویه راس A در مثلث ABD بوده لذا میتوان نوشت $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$

ولی چون $CD = AC$ پس میتوان نوشت $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{AC}$

و از آنجا $AD = \frac{AB \times AC}{BC}$ و یا $AD = \frac{bc}{a}$

مسئله - در مثلث قائم الزاویه ABC زاویه $\hat{B} = 2\hat{C}$ میباشد ارتفاع AH را رسم میکنیم و AB را باندازه BH امتداد میدهیم تا نقطه D و خط OH را وصل می کنیم این خط AC را در نقطهٔ O قطع میکند ثابت کنید که $OH = OA = OC$ است



حل - چون $BH = DB$ مطابق فرض است پس مثلث DBH متساوی الساقین بوده لذا زاویه $\hat{1} = \hat{2}$ میباشد و چون $\hat{2}$ و $\hat{3}$ متقابله براس هستند پس $\hat{3} = \hat{2} = \hat{1}$ میشود اما از مثلث قائم الزاویه DAO نتیجه میشود $\hat{1} + \hat{4} = 90^\circ$ و از طرفی چون AH عمود است بر BC لذا $\hat{3} + \hat{5} = 90^\circ$ اما چون $\hat{1} = \hat{3}$ است پس $\hat{1} + \hat{5} = 90^\circ$ و یا از این مقایسه اینده نتیجه میشود $\hat{1} + \hat{4} = 90^\circ$ پس معلوم میشود که $\hat{4} = \hat{5}$ است یعنی مثلث AHO متساوی الساقین بوده و لذا $AH = OA$ میشود ولی چون $\hat{B} = \hat{1} + \hat{2}$ و از طرفی $\hat{2} = \hat{1}$ و $\hat{B} = 2\hat{C}$ است پس معلوم میشود $\hat{3} = \hat{2} = \hat{1} = \hat{C}$ میباشد

OH متساوی الساقین بوده و $OC = OH$ است و چون زاویه

$\hat{4}$ در مثلث AHC و زاویه $\hat{3} - 90^\circ = \hat{5}$ و $\hat{3} = \hat{C}$ است

پس $\hat{4} = \hat{5} = \hat{6}$ لذا مثلث AHO متساوی الاضلاع بوده پس

$AH = OH = OA$ میشود و چون $AH = OA = OH = OC$ شد لذا بدست میآید

$$OA = OH = OC$$

مسئله - از نقطهٔ A قاطع ABC را بطریقی که قسمت خارجی آن $AB = R$ است و یک قاطع دیگر AOD را بر دایره O بشعاع R رسم میکنیم ثابت کنید که زاویه $COD = 3A$ میباشد

حل - چون مقدار هر زاویهٔ محیطی برابر است با نصف قوس مقابلش لذا

$\hat{H} = \frac{\widehat{CD}}{2}$ و $\hat{O} = 2\hat{H}$ و همچنین زاویه $B\hat{C}H = \frac{\widehat{BH}}{2}$ و از طرفی $\widehat{BH} = B\hat{O}H$

و چون مثلث ABO متساوی الساقین است پس $B\hat{O}H = B\hat{A}H$

و از اینجا نتیجه میشود $B\hat{C}H = \frac{B\hat{A}H}{2}$ و چون $C\hat{H}O$ زاویه خارجه مثلث ACH

است میتوان نوشت $C\hat{H}O = A\hat{C}H + H\hat{A}C$ یعنی $C\hat{H}O = A + \frac{A}{2}$

بنابراین COD که دو برابر CHD است چنین میشود $COD = 2(A + \frac{A}{2}) = 3A$

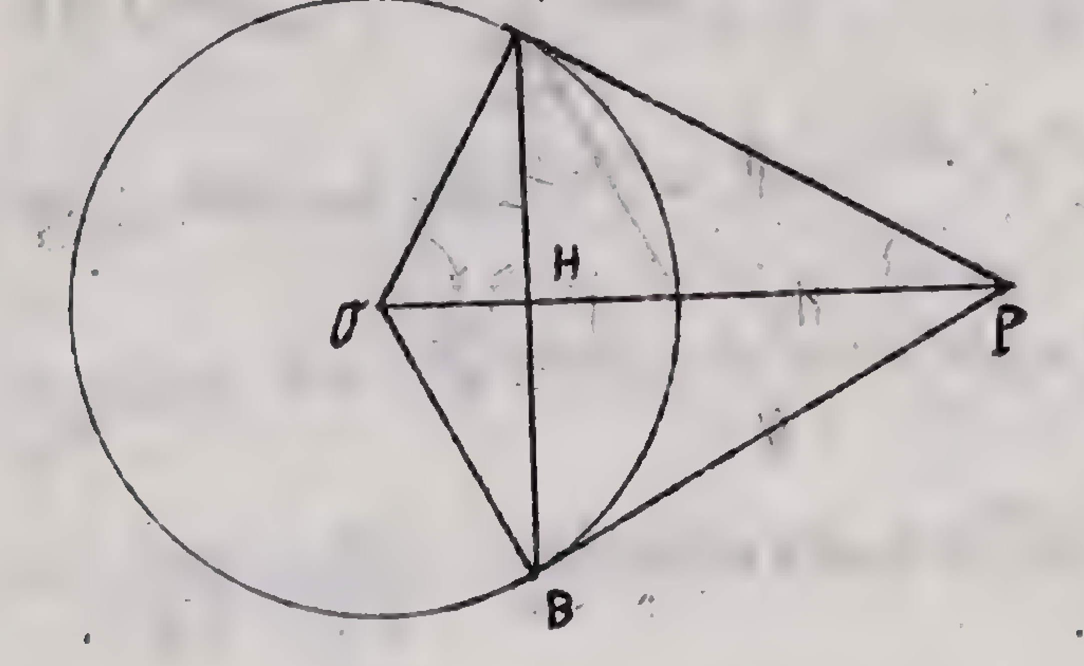
مسئله - در دایره بشعاع R یکی از اشعه را باندازهٔ خود در خارج امتداد داده و از نقطهٔ P دو مماس بر دایره رسم میکنیم مطلوبست محاسبه طول مماس و طول وتری که دو نقطه تماس را بهم وصل میکند

حل - در مثلث قائم الزاویه OAP (زیرا شعاع OA بر مماس PA عمود است) میتوان نوشت $OP^2 = OA^2 + PA^2$ و چون $OP = 2R$ و $OA = R$ است پس $4R^2 = R^2 + PA^2$ و یا $PA^2 = 4R^2 - R^2$

و از آنجا $PA^2 = 3R^2$ و بالاخره $PA = R\sqrt{3}$

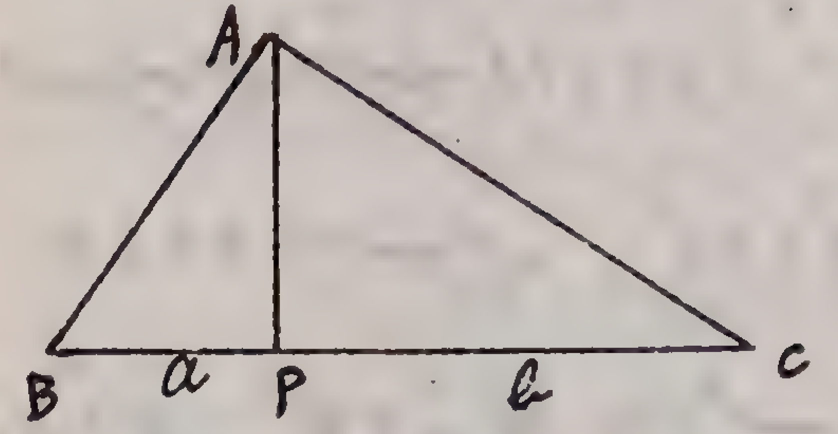
حال برای محاسبهٔ خط AB گوئیم چون دو مثلث OAP و OBP متساویند (در سه ضلع) پس معلوم میشود که خط OP در مثلث متساوی الساقین APB منصف الزاویه بوده لذا بر قاعده عمود است میتوان گفت که در مثلث قائم الزاویه OAP ارتفاع وارد از رأس زاویه قائمه یعنی AH تشکیل دو مثلث متشابه OHA با OAP میدهد بطوریکه میتوان این نسبت را نوشت

$\frac{AP}{AH} = \frac{OP}{OA}$ و یا $\frac{R\sqrt{3}}{AH} = \frac{2R}{R}$ و از اینجا $2AH = R\sqrt{3}$ اما میدانیم که شعاع عمود بر وتر آنرا نصف میکند پس $AB = 2AH$ یعنی $AB = R\sqrt{3}$



مسئله - در مثلث قائم الزاویه ABC قائمه برأس A طول دو قطعه BP و CP که بوسیله ارتفاع AP از وتر جدا میشوند برابر m و n پیدا شده مطلوبست

محاسبهٔ طول AB و AC

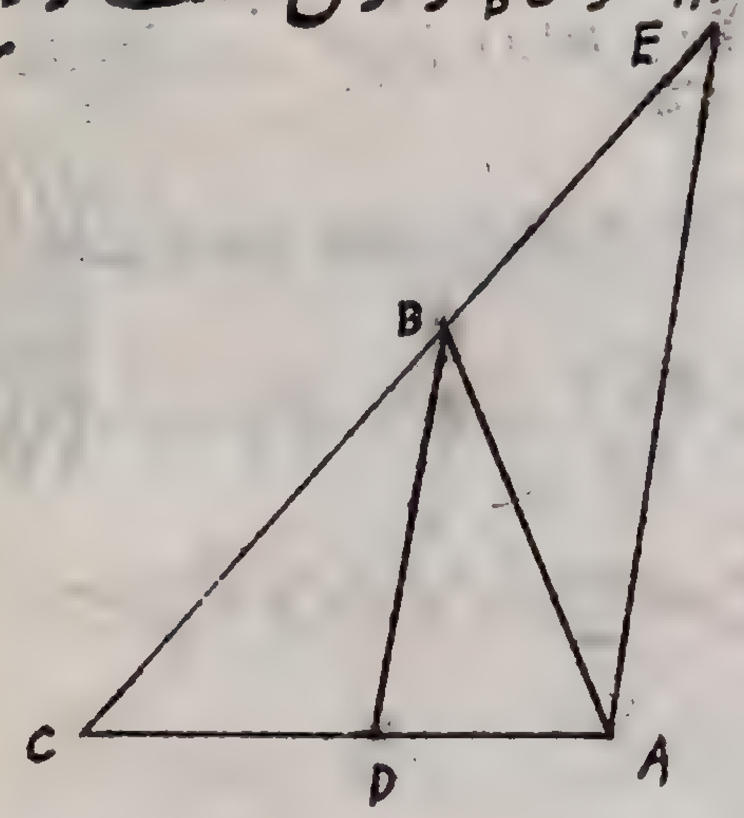


حل - چون در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی است مابین دو قطعه که از وتر جدا میشود لذا $AP^2 = a \times b$ پس $AP=\sqrt{ab}$ پس از محاسبهٔ AP گوئیم

$AB^2=BP^2+AP^2$ یعنی $AB^2=a^2+ab$ و از آنجا $AB=\sqrt{a^2+ab}$

و به همچنین $AC^2=PC^2+AP^2$ یعنی $AC^2=b^2+ab$ و از آنجا $AC=\sqrt{b^2+ab}$

مسئله - مطلوبست رسم مثلثی که دو ضلع AB و BC و طول منصف‌الزاویهٔ زاویهٔ بین آنها نیز معلومست

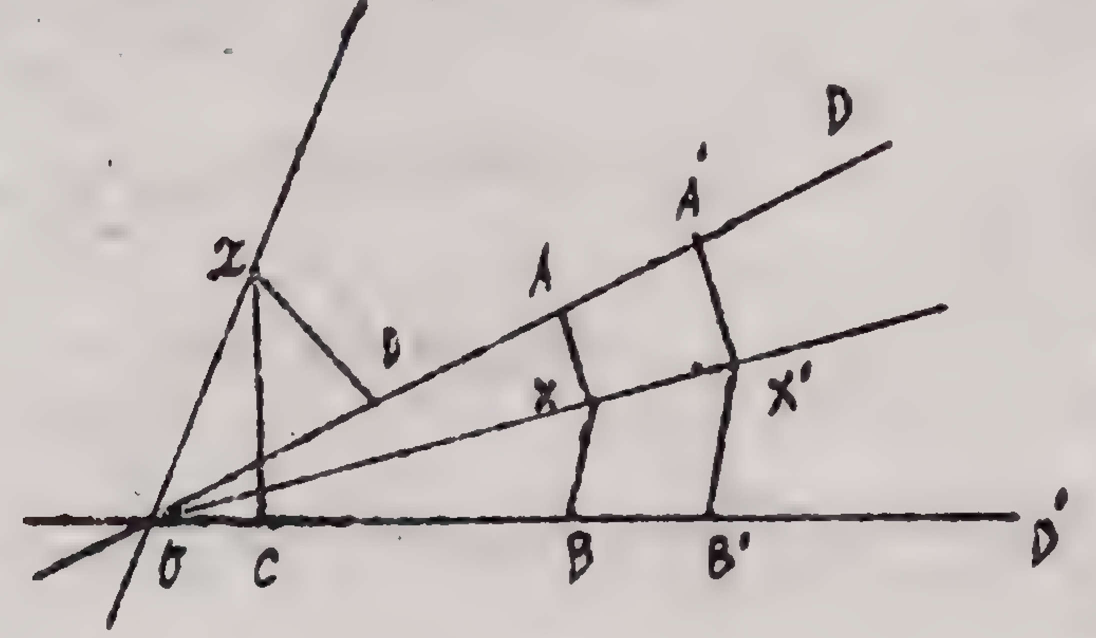


حل - فرض میکنیم ABC مثلث مفروض باشد در اینصورت اگر خط AE بموازات BD که منصف‌الزاویه است رسم شود مثلث ABE متساوی‌الساقین است (نظر بخاصیت منصف‌الزاویهٔ داخلی چرا؟) پس میتوان AE را محاسبه نمود چونکه دو مثلث CAE و CDB متشابه هستند پس $\frac{AE}{BD}=\frac{CE}{CB}$ و چون $CE=CB+BE$ یعنی برابر $CB+BA$ میباشد لذا $\frac{AE}{BD}=\frac{BC+AB}{BC}$ و چون $AB=a$ و $BC=c$ و $DB=b$ معلومند پس $AE=b(\frac{a+c}{a})$ حال چون AE معلوم شد پس مثلث متساوی‌الساقین

ABE را میسازیم و از رأس B خط BD را بموازات AE رسم کرده و از آن طول $b=BD$ را جدا مینمائیم و بعد خط EB را امتداد میدهیم تا AD را در نقطهٔ C قطع کند

مسئله - مطلوبست مکان هندسی نقاطی که نسبت تفاضلشان از دو خط D و D' مثل $\frac{2}{3}$ باشد

حل - محل تقاطع خطوط D و D' یعنی نقطهٔ O متعلق بمکان هندسی مطلوب میباشد و اگر فرض کنیم X یکی از نقاطی باشد که رابطهٔ $\frac{XA}{XB}$ برابر $\frac{2}{3}$ در آن صدق کند یعنی متعلق بمکان مطلوب

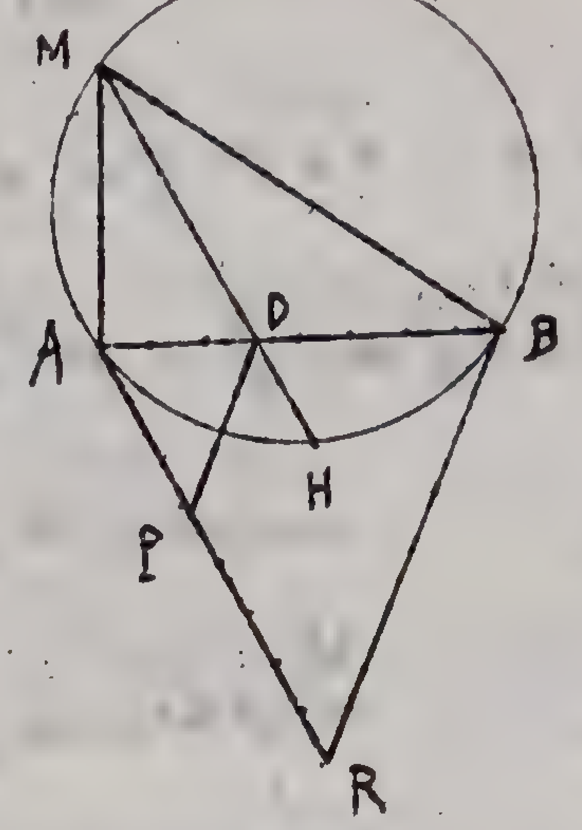


باشد پس خط OX مکان هندسی مطلوب میباشد زیرا هر نقطهٔ دیگر مانند X' در روی خط OX انتخاب کنیم رابطهٔ ... $\frac{X'A'}{X'B'}=\frac{XA}{XB}=\frac{2}{3}$ محقق است ممکن است مکان هندسی مطلوب خط OZ را فرض کرد زیرا میتوان نوشت $\frac{ZD}{ZC}=\frac{2}{3}$

مسئله - دایرهٔ O مفروض است قوس AB را بطریقی بدو قسمت کنید که نسبت وترهایشان هم مثل نسبت $\frac{3}{5}$ باشد

حل - اگر فرض کنیم که قوس AB بدو قوس AM و MB بطوری قسمت شده باشد که $\frac{AM}{MB}=\frac{3}{5}$ باشد از رسم مثلث MAB و منصف‌الزاویهٔ آن چنین معلوم میشود که نسبت $\frac{DA}{DB}=\frac{MA}{MB}$ پس باید خط AB را طوری قسمت کرد

که نسبت $\frac{DA}{DB}$ مساوی $\frac{3}{5}$ باشد پس از نقطه A خط غیر مشخصی رسم نموده و در روی آن AP را برابر ۳ و PR را برابر ۵ جدا نموده از نقطه B به R وصل کرده و از نقطه P بموازات BR رسم میکنیم خط AB را در نقطه D بطریقی قطع میکند که $\frac{DA}{DB}=\frac{3}{5}$ میباشد زیرا

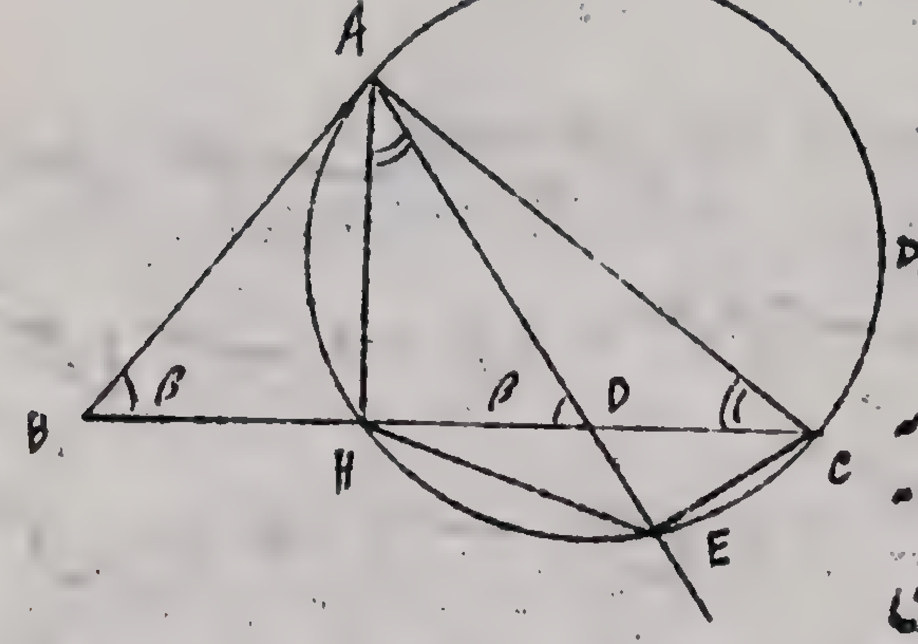


$\frac{DA}{DB}=\frac{AP}{PR}=\frac{3}{5}$ است پس کافیست که نقطه H وسط قوس AB در پائین دایره را پیدا کرده به D وصل کرده امتداد دهیم تا دایره را در نقطه M که همان نقطه مطلوبست قطع نماید (منصف الزاویه قوس مقابل را نیز نصف میکند) محقق است که نسبت $\frac{MA}{MB}=\frac{3}{5}$ است

مسئله- در مثلث ABC قائم الزاویه در زاویه A ارتفاع AH را رسم میکنیم و در روی BC طول HD=HB را جدا نموده و CE را عمود بر AD رسم می‌کنیم ثابت کنید اولاً نقاط H و E در روی محیط دایره‌ هستند که مرکزش در روی AC است ثانیاً خط AH=EH است و ثالثاً $\hat{ACB}=\hat{DAH}$ میباشد

حل- اولاً چون زاویه $\hat{H}$ و $\hat{E}$ قائمه‌اند و دو مثلث AHC و AEC در وتر AC مشترک هستند پس قطعاً دایره بقطر AC از نقاط H و E میگذرد زیرا امکان

هندسی رئوس مثلث های قائم الزاویه که در وتر مشترک باشند دایره ایست بقطر وتر مشترک. ثانیاً وقتی ثابت شد که $\hat{DAH}=\hat{ACB}$ است (بعداً ثابت میکنیم) پس معلوم میشود که قوس $\overset{\frown}{AH}$ برابر قوس HE است یعنی دو زاویه $\hat{AEH}$ و $\hat{HAE}$ متساویند لذا لازم میآید که مثلث HAE متساوی الساقین بوده و AH=HE است

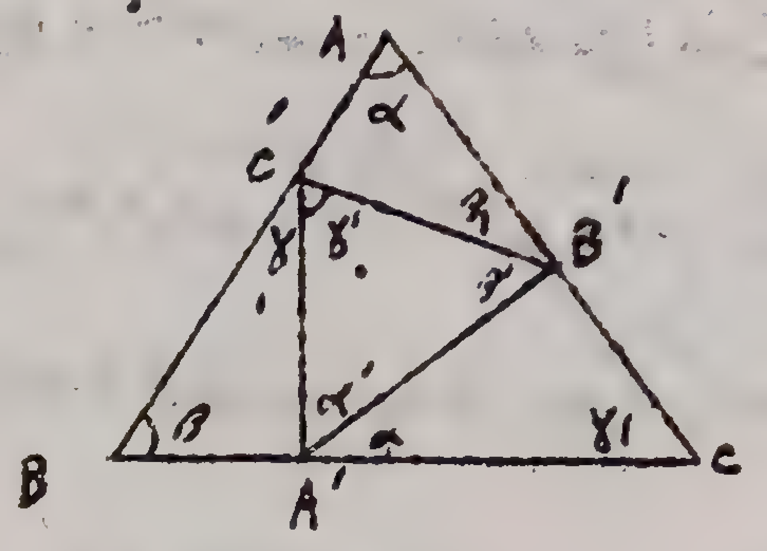


ثالثاً- ثابت می‌کنیم $\hat{DAH}=\hat{ACB}$ است پس گوئیم میدانیم که زاویه $\hat{ACB}=90-B$ میباشد و چون مثلث ABD متساوی الساقین است زیرا HB=HD و خط AH عمود بر وسط آن است پس AB=AD لذا نتیجه میشود زاویه ADB برابر $\hat{B}$ باشد و از مثلث قائم الزاویه AHD زاویه $\hat{DAH}=90-B$ میباشد پس $\hat{ACB}=\hat{DAH}$ خواهد بود

مسئله- ثابت کنید که هرگاه دو مثلث اضلاعشان بهم عمود باشند متشابه‌اند

حل- برای اثبات اینکه دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه است کافیست ثابت کنیم زوایای آنها باهم مساوی متساوی هستند پس گوئیم چون مثلث A C'B' قائمه است لذا میتوان نوشت $\alpha+\beta_1=90°$ و از طرفی چون $\beta_1+\beta=90°$ پس لازم میآید $\hat{\beta}'=\hat{\beta}$ و چون $\beta+\gamma_1=90°$ و $\gamma+\gamma_1=90°$ میباشد پس نتیجه میشود $\gamma'=\beta$ و همچنین $\gamma+\alpha_1=90°$ و $\alpha+\alpha_1=90°$ میباشد

لذا γ = γ' میشود پس ثابت شد که زوایای α و β و γ از مثلث ABC با زوایای α' و β' و γ' در مثلث A'B'C' متساوی شدند لذا دو مثلث متشابه اند



مسئله ـ مطلوبست محاسبهٔ طول میانه وارد از رأس C بر قاعده AB در صورتیکه اضلاع مثلث a و b و c معلوم هستند.

حل ـ برای اثبات ارتفاع CH را رسم میکنیم و اگر طول میانه CD را به d نمایش دهیم بنابر خاصیت مربع ضلع مقابل بزاویهٔ منفرجه و ضلع مقابل بزاویه حاده در مثلث به ترتیب میتوان نوشت

$$a^2 = d^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2\,\frac{c}{2}\,DH \qquad (1)$$

و

$$b^2 = d^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2\,\frac{c}{2}\,DH \qquad (2)$$

و پس از جمع ایندو رابطه معلوم میشود

$$a^2 + b^2 = 2d^2 + 2\,\frac{c^2}{4}$$

و یا

$$a^2 + b^2 = 2d^2 + \frac{c^2}{2}$$

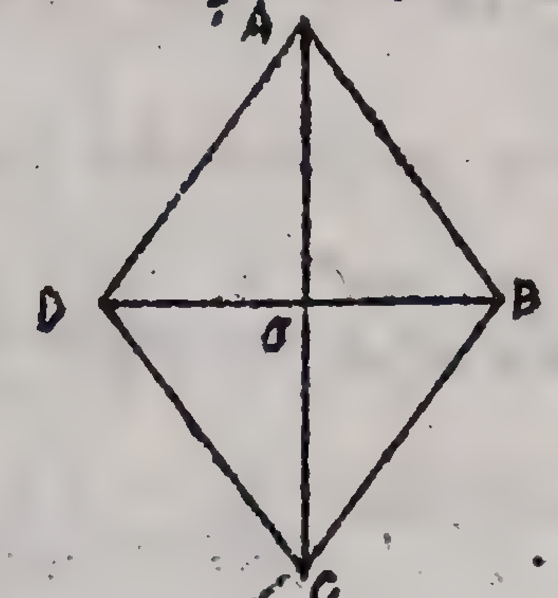
پس

$$d^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

مسئله ـ ثابت کنید که در لوزی چهار برابر مربع یک ضلع مساویست با مجموع

مربعین دو قطر یعنی $4AB^2 = AC^2 + DB^2$

حل ـ میدانیم که در لوزی دو قطر عمود و منصف یکدیگرند پس $AC = 2AO$



و $DB = 2BO$ پس $AC^2 = 4AO^2$ و

$DB^2 = 4BO^2$ اما از مثلث قائمه الزاویه

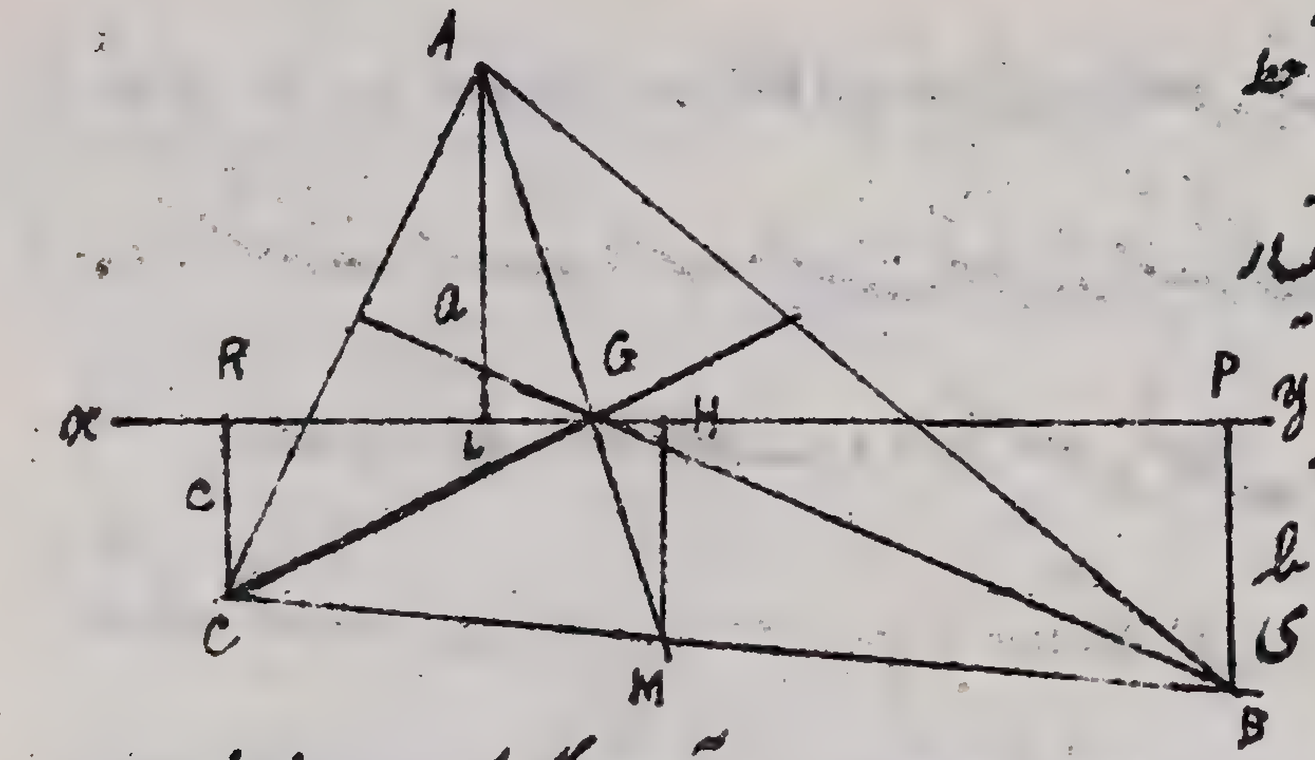
AOB نتیجه میشود

$AB^2 = AO^2 + OB^2$ اگر طرفین را در چهار حساب کنیم حاصل میشود

$4AB^2 = 4AO^2 + 4OB^2$ و یا $4AB^2 = AC^2 + DB^2$

مسئله ـ ثابت کنید که مجموع فواصل دو رأس B و C از خط غیرمشخص xy که از مرکز ثقل مثلث عبور میکند برابر است با فاصله رأس A از همین خط (نقطه G مرکز ثقل محل تلاقی سه میانه است در مثلث)

حل ـ اگر فاصله رأس A را از خط xy مار بر نقطه G برابر a و فاصله B و C نیز به ترتیب از همین خط مساوی b و c اختیار کنیم باید ثابت نمود برای $a = b + c$



اینکار از نقطه M عمود MH را بر xy فرود آورده گوئیم در ذوذنقه PBRC از وسط یک ساق آن که BC است خط MH بموازات

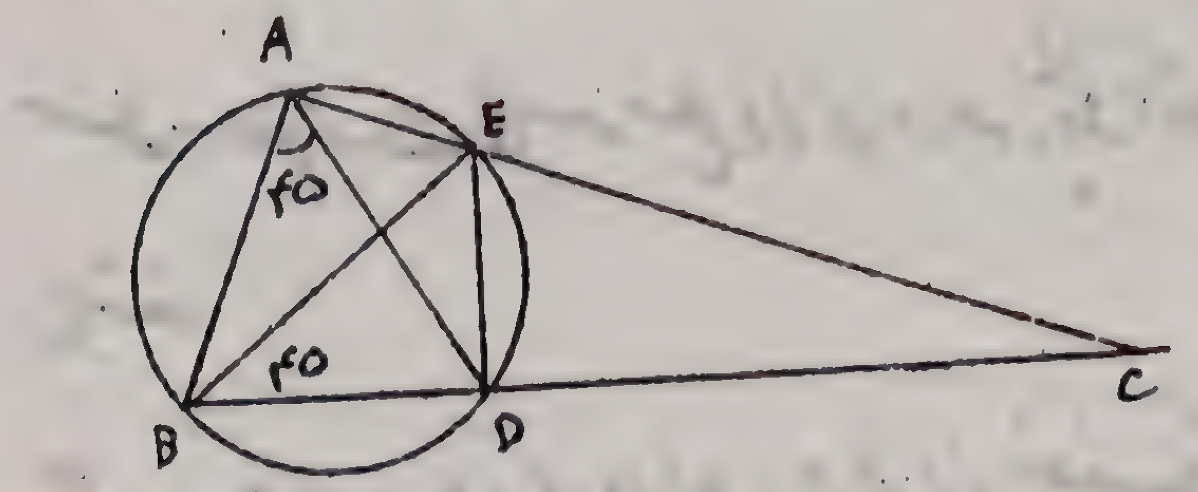
قاعدتین رسم شده است لذا مساویست با نصف مجموع قاعدتین یعنی
$MH = \frac{b+c}{2}$ اما از طرفی نظر بتشابه دو مثلث ALG و MHG (زیرا در زوایا
H و L قائمه و در زاویه G متقابل بالرأس بوده پس متساویند بنابراین در
زاویهٔ سوم نیز مساوی میشوند لذا متشابه اند) میتوان نسبت زیر را نوشت
$\frac{a}{MH} = \frac{AG}{MG}$ اما نظر بخاصیت میانه ها میدانیم که $AG = 2MG$ است
پس $\frac{a}{MH} = \frac{2MG}{MG}$ و از آنجا $\frac{a}{MH} = 2$ یعنی $MH = \frac{a}{2}$ و چون $MH = \frac{b+c}{2}$
پس $\frac{a}{2} = \frac{b+c}{2}$ یعنی $a = b + c$

مسئله - مثلث قائم الزاویه BAC مفروض است منصف الزاویه زاویه قائمه A را رسم کرده این خط وتر BC را در نقطه D قطع میکند از نقطه D خطی بر وتر عمود میکنیم تا AC را در نقطه E قطع کند ثابت کنید DE = DB

راه حل یکم - اگر وسط خط BE را مرکز قرار داده دایره رسم کنیم از نقاط A و D میگذرد زیرا مکان هندسی رئوس مثلث های قائم الزاویه که در وتر مشترک باشند دایره ایست بقطر وتر مشترک آنها و چون زاویه DAB = ۴۵ درجه است و در قوس مقابل با زاویه $B\hat{E}D$ مشترک میباشد پس مقدار زاویه $B\hat{E}D = ۴۵$ خواهد بود و چون مثلث BDE قائم الزاویه است پس لازم میآید که زاویه $E\hat{B}D$ نیز مساوی ۴۵ درجه باشد پس مثلث EDB متساوی الساقین بوده و

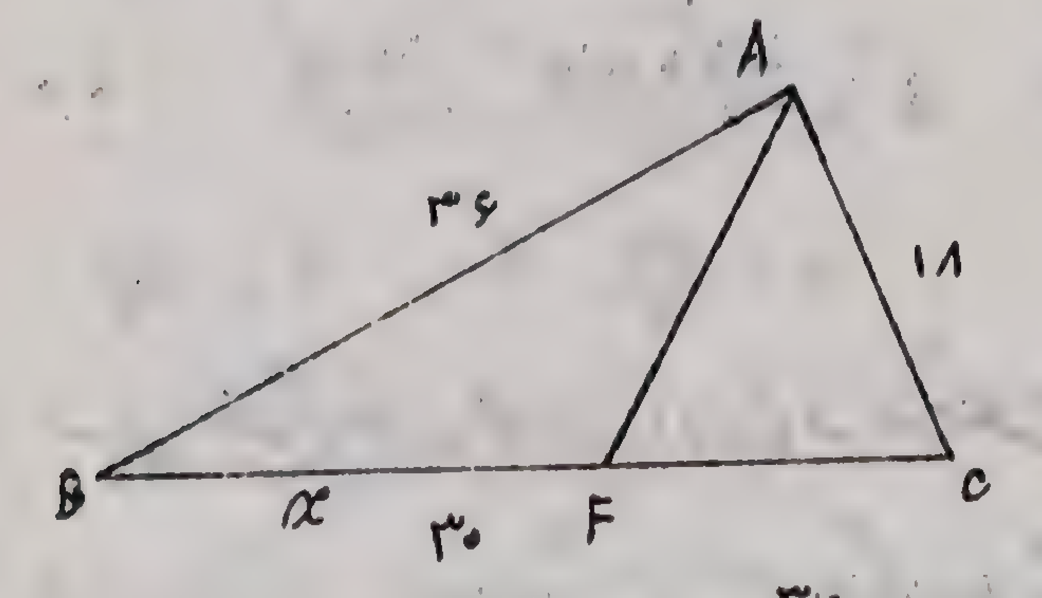
DE = DB است

راه حل دوم - نظر بخاصیت منصف الزاویه داخلی میتوان رابطهٔ زیر را نوشت $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$



از اینجا مقدار BD را پیدا میکنیم میشود $BD = \frac{AB \times DC}{AC}$ (۱) اما چون مثلث EDC با BAC متشابه است زیرا در زوایای $\hat{D}$ و $\hat{A}$ قائمه بوده و در زاویه $\hat{C}$ نیز مشترک میباشند پس در زاویه سوم نیز متساویند لذا میتوان نسبت زیر را نوشت $\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{AC}$ از اینجا نیز مقدار DE را حساب میکنیم چنین میشود $DE = \frac{AB \times DC}{AC}$ (۲) از مشاهده تساوی (۱) و (۲) معلوم میشود که DE = DB

مسئله - اضلاع مثلثی بترتیب ۱۸ و ۳۰ و ۳۶ سانتیمتر میباشند منصف الزاویه رأس A را رسم میکنیم مطلوبست محاسبه دو قطعه که این خط از ضلع BC جدا میکنند



حل - اگر BF را مساوی x فرض کنیم نظر بخاصیت منصف الزاویه میتوان نوشت $\frac{x}{30-x} = \frac{36}{18} = 2$

و از آنجا $x = 60 - 2x$ پس $60 = x + 2x$ یا $60 = 3x$ پس

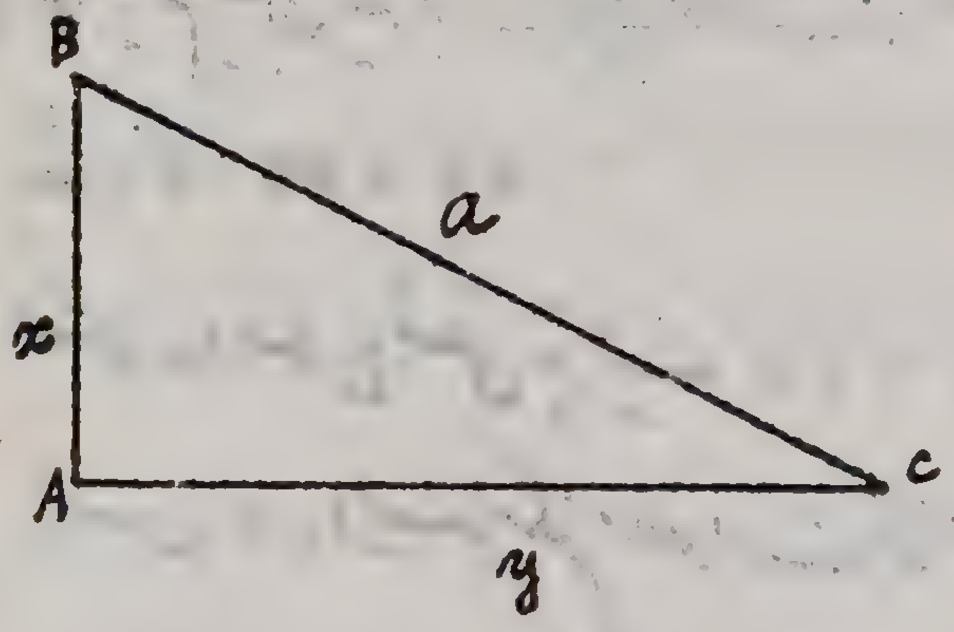
$BF = x = 20$ و $FC = 30 - 20 = 10$ خواهد بود

مسئله - مطلوبست محاسبه ضلع لوزی درصورتیکه اقطار آن ۸ و ۶ متر میباشند

حل - چون در لوزی دو قطر برهم عمود و منصف یکدیگرند پس میتوان نوشت $AB^2 = AO^2 + OB^2$ یعنی $AB^2 = 16 + 9 = 25$ یعنی $AB = 5$ متر

مسئله - در مثلث قائم الزاویه وتر مساوی a و نسبت دو ضلع مجاور قائمه بهم مثل نسبت ۳ به ۴ است مطلوبست محاسبه دو ضلع مجاور بزاویه قائمه

حل - در مثلث قائم الزاویه میتوان نوشت $a^2 = x^2 + y^2$ اما چون



$\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ است پس

$x = \frac{3}{4} y$ و $x^2 = \frac{9}{16} y^2$

چون بجایش قرار دهیم چنین خواهیم داشت

$a^2 = \frac{9}{16} y^2 + y^2$

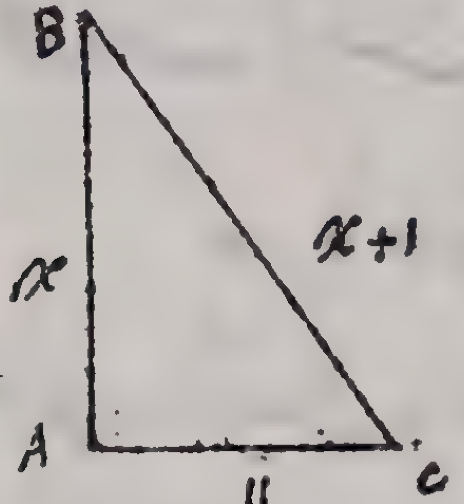
ویا $a^2 = \frac{9y^2 + 16y^2}{16} = \frac{25y^2}{16}$ و از آنجا $a = \frac{5y}{4}$ یعنی

$y = \frac{4a}{5}$ و $x = \frac{3a}{5}$

مسئله - ضلع کوچک مجاور بزاویه قائمه در مثلث قائمه الزاویه ۱۱ متر است و طول وتر یک واحد بیشتر از ضلع دیگر میباشد مطلوبست محاسبهٔ اضلاع و

مساحت مثلث

حل اگر ضلع دیگر مجاور بزاویه قائمه را x فرض کنیم نظر بخاصیت مثلث قائم الزاویه میتوان نوشت $(x+1)^2 = x^2 + 121$



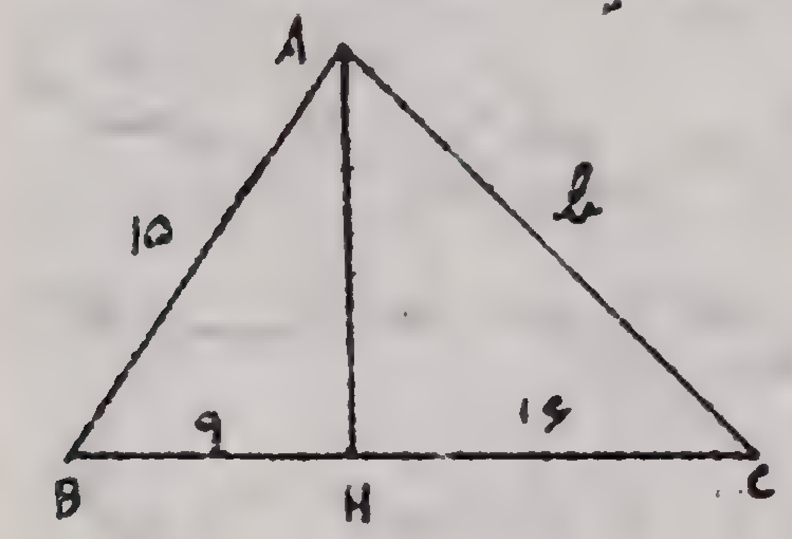
ویا $x^2 + 1 + 2x = x^2 + 121$

پس $2x = 121 - 1$

ویا $2x = 120$ و از آنجا $x = 60$ و مساحت مثلث مساویست با $S = \frac{11 \times x}{2}$ یعنی $S = 11 \times 30$ که مساویست با ۳۳۰ متر مربع

مسئله - در مثلث قائم الزاویه $c = 15$ متر و $h = 12$ متر میباشد مطلوبست محاسبهٔ دو ضلع a و b و دو قطعه که ارتفاع از روی وتر جدا میکنند

حل - اگر مثلث قائم الزاویه مفروض BAC باشد و AH ارتفاع وارد بر وتر چون ارتفاع واسطهٔ هندسی است مابین دو قطعه که از وتر جدا میکند پس $AH^2 = BH \cdot HC$ (۱) اما در مثلث ABH میتوان نوشت



$15^2 = 12^2 + x^2$ درصورتیکه $BH = x$ فرض شود و از آنجا $x^2 = 225 - 144 = 81$ پس

$BH = x = 9$ حال در رابطه (۱) مقدار BH را قرار دهیم حاصل میشود $AH^2 = 9 \times BH$ یعنی $144 = 9 \times BH$ پس $BH = \frac{144}{9}$ و از آنجا

$BH = ۱۶$ بنابراین طول $a = BC = BH = HC$ چنین میشود $a = ۲۵$
و برای محاسبه b هم میتوان از مثلث قائم الزاویه ABC استفاده نمود و هم ممکن است از مثلث قائم الزاویه AHC نتیجه گرفت که چنین میشود
$b^۲ = ۱۲^۲ + ۱۶^۲$ یعنی $b^۲ = ۱۴۴ + ۲۵۶$ پس $b^۲ = ۴۰۰$ و $b = ۲۰$

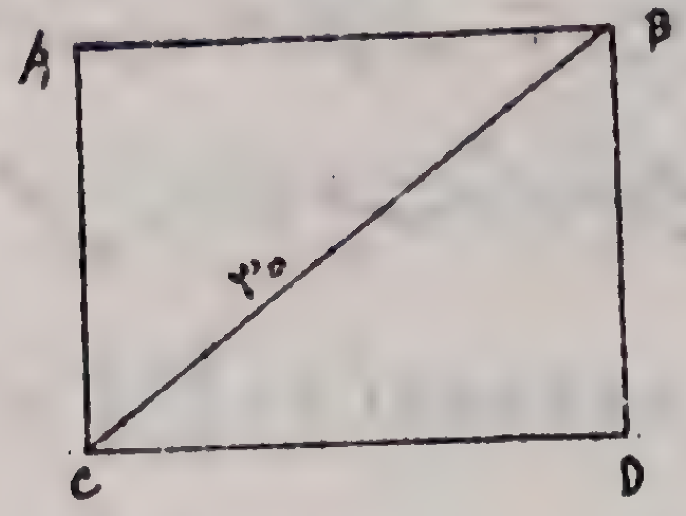
مسئله ـ در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ارتفاع وارد از رأس زاویه قائمه و زاویه دو قطعه متساوی ۶ متر تقسیم میکند مطلوبست محاسبه ارتفاع و طول اضلاع مثلث

حل ـ میتوان از خاصیت ارتفاع استفاده کرده چنین نوشت
$AH^۲ = ۶ \times ۶ = ۳۶$ پس $AH = ۶$ حال در مثلث ABH میتوان نوشت $AB^۲ = AH^۲ + BH^۲$ یعنی $AB^۲ = ۳۶ + ۳۶ = ۷۲$ پس $AB = \sqrt{۷۲}$ و از آنجا $AB = ۶\sqrt{۲}$ پس $AC = ۶\sqrt{۲}$ چون مثلث متساوی الساقین بود

مسئله ـ قطر مربع مستطیلی ۳۰ متر و نسبت عرض به طول مانند $\frac{۳}{۴}$ است مطلوبست محاسبهٔ اضلاع مستطیل

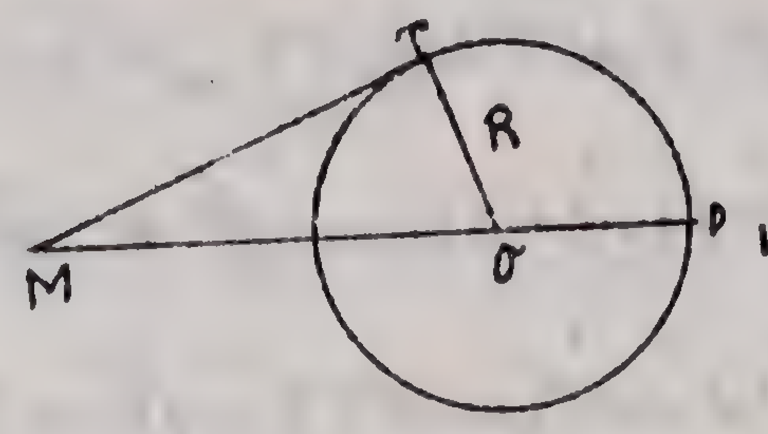
حل ـ در مثلث قائم الزاویه CBD میتوان نوشت $BD^۲ + CD^۲ = CB^۲$ و چون $\frac{BD}{CD} = \frac{۳}{۴}$ است پس $۳۰^۲ = BD^۲ + \left(\frac{۴BD}{۳}\right)^۲$ یعنی $۳۰^۲ = BD^۲ + \frac{۱۶BD^۲}{۹}$ یا $۳۰^۲ = \frac{۹BD^۲ + ۱۶BD^۲}{۹}$ و از آنجا $۳۰^۲ = \frac{۲۵BD^۲}{۹}$

$۳۰^۲ = \frac{۲۵BD^۲}{۹}$ از طرفین جذر استخراج می‌کنیم $۳۰ = \frac{۵BD}{۳}$ و یا $۳ \times ۳۰ = ۵BD$ پس $BD = \frac{۹۰}{۵} = ۱۸$ متر و بنابراین $CD = \frac{۴BD}{۳}$ یعنی $CD = \frac{۴ \times ۱۸}{۳}$ و از آنجا $CD = ۲۴$ متر



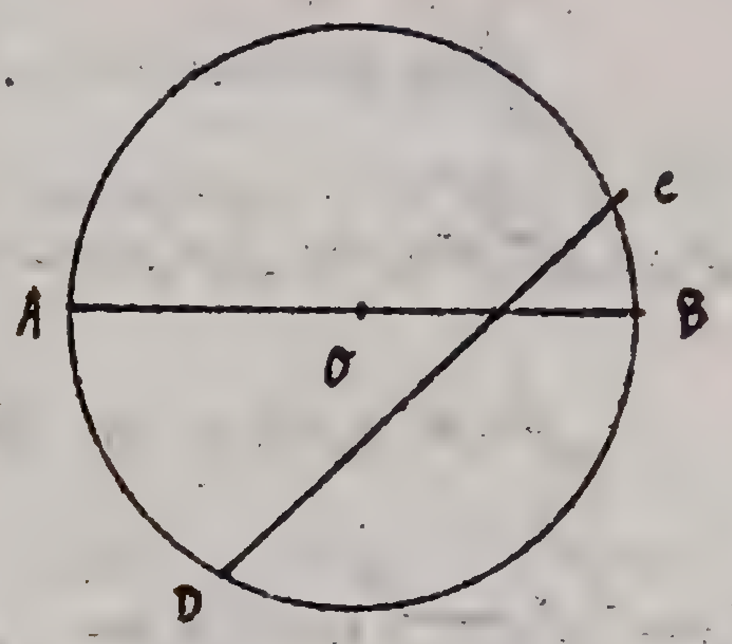
مسئله ـ در دایره بشعاع R قاطع MOD تا از مرکز دایره طولش برابر d باشد مطلوبست محاسبهٔ طول مماس وارد از نقطه M بر دایره مفروض

حل ـ شعاع OT را رسم می‌کنیم این شعاع بر خط مماس MT عمود است پس میتوان از مثلث قائم الزاویه OTM مقدار MT را بطریق زیر محاسبه نمود
$OM^۲ = OT^۲ + MT^۲$ و از آنجا $MT^۲ = OM^۲ - OT^۲$
اما $OM = d - R$ و $OT = R$ است پس $MT^۲ = (d - R)^۲$ یعنی $MT^۲ = d^۲ + R^۲ - ۲dR - R^۲$ و پس از اختصار $MT^۲ = d^۲ - ۲dR$ و یا $MT^۲ = d^۲\left(۱ - \frac{۲R}{d}\right)$ پس $MT = d\sqrt{۱ - \frac{۲R}{d}}$ و شرط امکان مسئله یعنی میتوانیم مماس بر دایره رسم کنیم اینست که $۱ - \frac{۲R}{d} > ۰$ مثبت یعنی $۲R < d$ باشد و معلوم که باید طول قاطع بزرگتر از قطر دایره باشد تا نقطه M بتواند در خارج دایره واقع شود



مسئله - در دایره O بشعاع R وتر CD قطر AB را طوری قطع میکند که از وسط $R = OB$ میگذرد مطلوبست طول دو قطعه این وتر که بواسطه قطر جدا میشود در صورتیکه نسبت این قطعه بهم مثل $\frac{1}{2}$ میباشد

حل - از خاصیت اوتار متقاطع در دایره نتیجه میشود که $HC \times HD = HA \times HB$



یعنی $HC \times HD = (R + \frac{R}{2})\frac{R}{2}$

ویا $HC \times HD = \frac{3R^2}{4}$

اما چون $\frac{HC}{HD} = \frac{1}{2}$ است

یعنی $HD = 2HC$ پس در

رابطه (۱) مقدار HD را بحسب HC بجایش میگذاریم نتیجه میشود

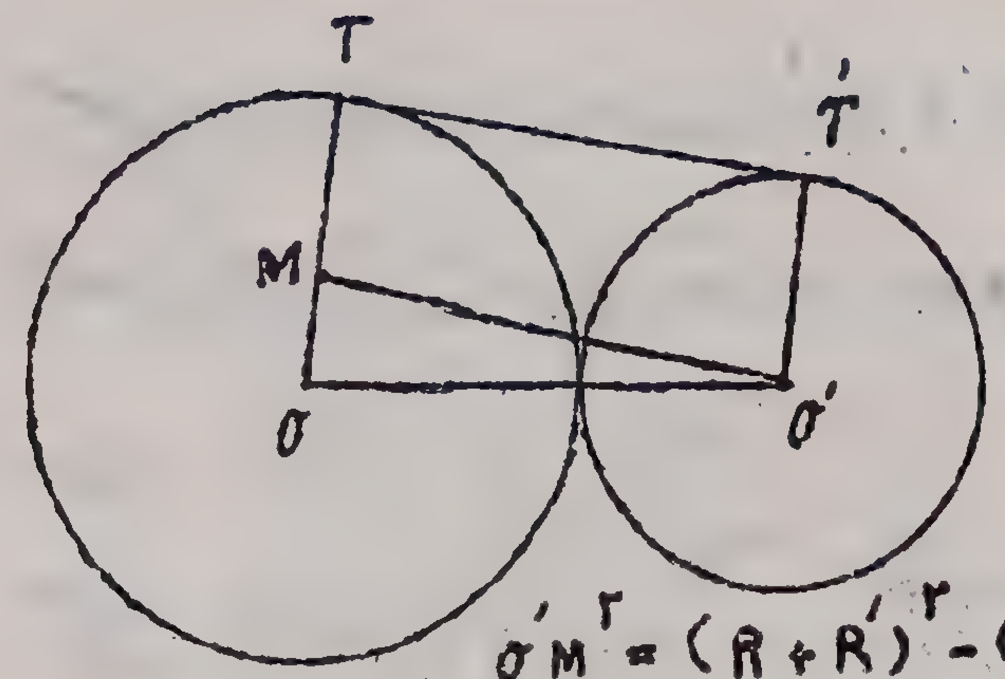
$HC \times 2HC = \frac{3R^2}{4}$ یعنی $2HC^2 = \frac{3R^2}{4}$ پس $HC^2 = \frac{3R^2}{8}$

واز آنجا $HC = \sqrt{\frac{3R^2}{8}}$ که میشود $HC = \frac{R\sqrt{6}}{4}$ و $HD = \frac{R\sqrt{6}}{2}$

مسئله - دو دایره مماس خارج O و O' بشعاع R و R' مفروضند مطلوبست محاسبه طول مماس مشترک آنها

حل - برای مماس TT' ابتدا از نقطه O' خطی بموازات TT' رسم میکنیم تا OT را در نقطه M قطع کند شاهد میشود که شکل MTT'O' مربع مستطیل میباشد زیرا OT و O'T' بر TT' عمود میباشند لذا مقدار $TT' = O'M$ است پس میتوان آنرا از مثلث قائم الزاویه OMO' استفاده نموده چنین نوشت

$OO'^2 = OM^2 + O'M^2$ و



چون $OO' = R + R'$

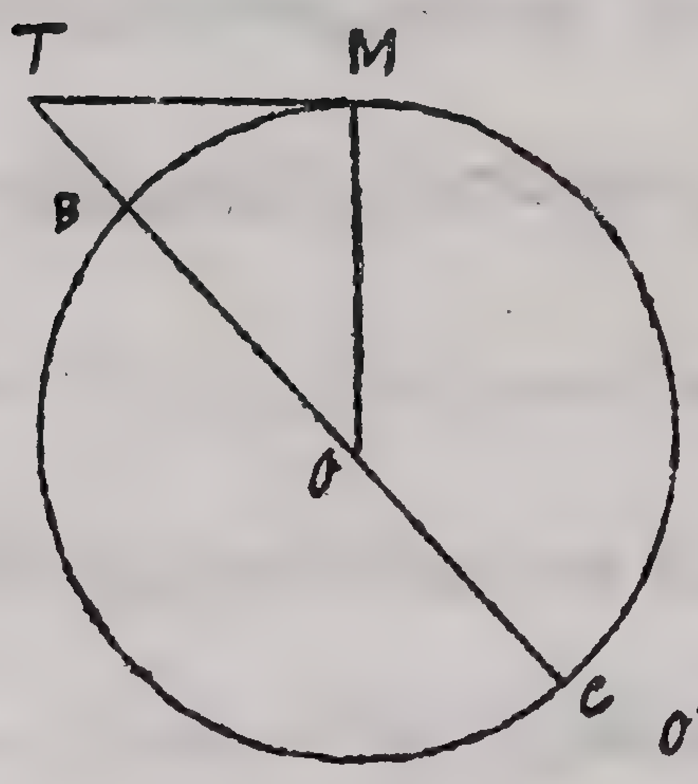
و $OM = R - R'$ میباشد

پس $OO'^2 - OM^2 = O'M^2$

یعنی $O'M^2 = (R+R')^2 - (R-R')^2 = 4RR'$

پس $O'M = 2\sqrt{RR'}$

مسئله - دایره بشعاع R مفروض است از نقطه M در روی محیط دایره مماس MT را باندازه شعاع آن رسم میکنیم واز نقطه T بمرکز دایره وصل نموده امتداد میدهیم این خط در نقاط B و C دایره را قطع میکند مطلوبست محاسبه طولهای TB و TC



حل - از نقطه O به M وصل میکنیم این خط شعاع بر مماس عمود است پس در مثلث قائم الزاویه TOM میتوان نوشت

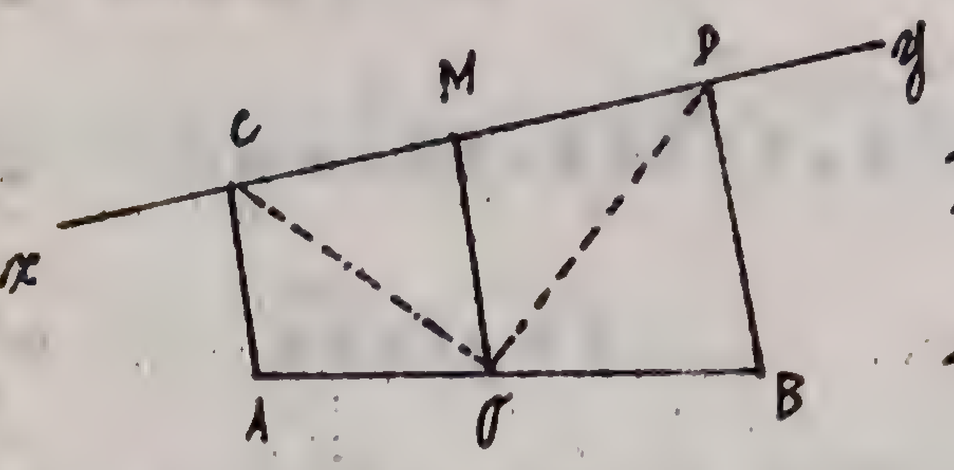
$TO^2 = OM^2 + OT^2$ ویا $OT^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$

پس $OT = R\sqrt{2}$ و چون $TB = OT - OB$ است پس مقدارش میشود

$TB = R\sqrt{2} - R = R(\sqrt{2} - 1)$ و $TC = OT + OC$ یعنی $TC = R\sqrt{2} + R$

و از آنجا $TC=R(\sqrt{2}+1)$

مسئله ـ خط AB مفروض است از نقاط A و B دو عمود AC و BD را بر خط xy رسم می‌کنیم ثابت کنید که نقطه O وسط AB از نقاط C و D متساوی الفاصله است

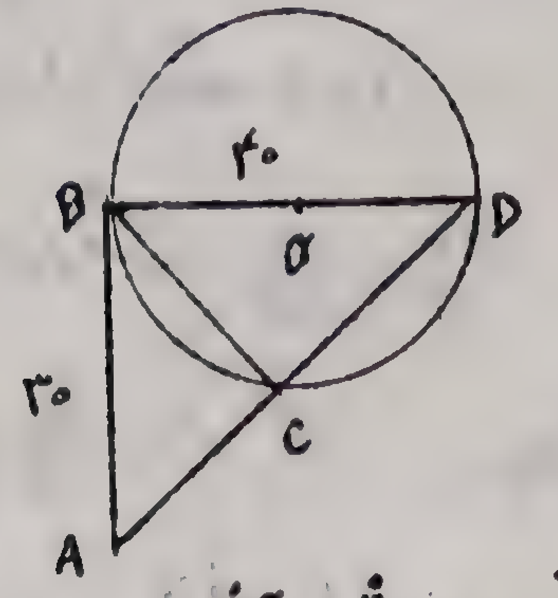


حل ـ ذوزنقه قائم الزاویه ACDB را ملاحظه می‌کنیم هرگاه از وسط AB که یک ساق آن است بموازات قاعده خط OM را رسم کنیم این خط ساق مقابل را نصف میکند و چون AC و BD بر ساق CD عمودند پس OM که موازی با آنها است بر CD عمود میشود پس مشاهده میشود که OM عمود منصف CD است و نظر بخاصیت عمود منصف خط نقطه O واقعه در روی آن از دو خط نقاط C و D هستند متساوی الفاصله میباشد

مسئله ـ دایره O به قطر BOD مساوی ۴۰ سانتی‌متر مفروض است از نقطه B مماس BA مساوی ۳۰ سانتی را رسم کرده و DA را نیز رسم میکنیم که دایره را در نقطه C قطع میکند مطلوبست تعیین AD و AC و BC

حل ـ ابتدا طول A را محاسبه میکنیم برای اینکار در مثلث قائم الزاویه ABD میتوان نوشت $AD^2=AB^2+BD^2$ و از آنجا $AD^2=30^2+40^2$ پس

$AD^2=2500$ و از آنجا $AD=50$ سانتی‌متر حال برای محاسبه BC و AC گوئیم

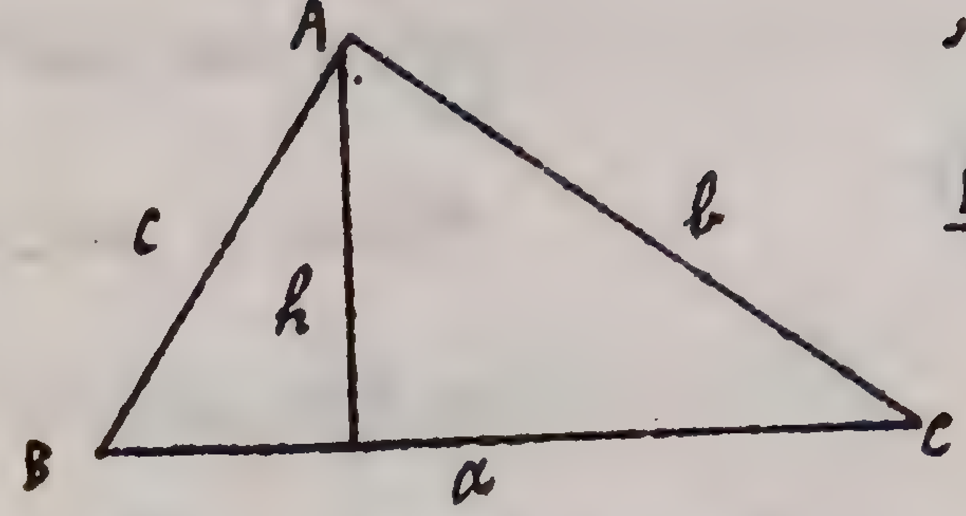


چون نقطه C بر روی محیط دایره است و نقاط D و B دو سر قطر هستند پس مثلث BCD قائم الزاویه میباشد و همچنین مثلث ACB نیز قائم الزاویه است پس میتوان نوشت $30^2=AC^2+BC^2$ (۱) اما مشاهده میشود که در مثلث قائم الزاویه ABD عمود وارد از راس قائمه بر وتر واسطه هندسی مابین دو قطعه AC و CD میباشد یعنی $BC^2=AC\times CD$ (۲)

ولی $CD=AD-AC$ و از آنجا $CD=50-AC$ پس $BC^2=AC(50-AC)$ چون این مقدار BC^2 را در رابطه (۱) قرار دهیم چنین میشود $30^2=AC^2+AC(50-AC)$ و چون مختصر کنیم میشود $30^2=AC^2+50AC-AC^2$ پس $30^2=50AC$ و از آنجا $AC=\frac{900}{50}=18$ و $CD=50-18=32$ و برای محاسبه BC هم میتوان از مثلث ACB استفاده کرد و هم از رابطه (۲) ما از این استفاده کرده مینویسیم $BC^2=18\times32=576$ پس $BC=24$

مسئله ـ ثابت کنید که در مثلث قائم الزاویه ABC اگر b و c اضلاع مجاور به زاویه قائمه باشند و h ارتفاع وارد از راس A بر وتر رابطه

$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$ محقق است

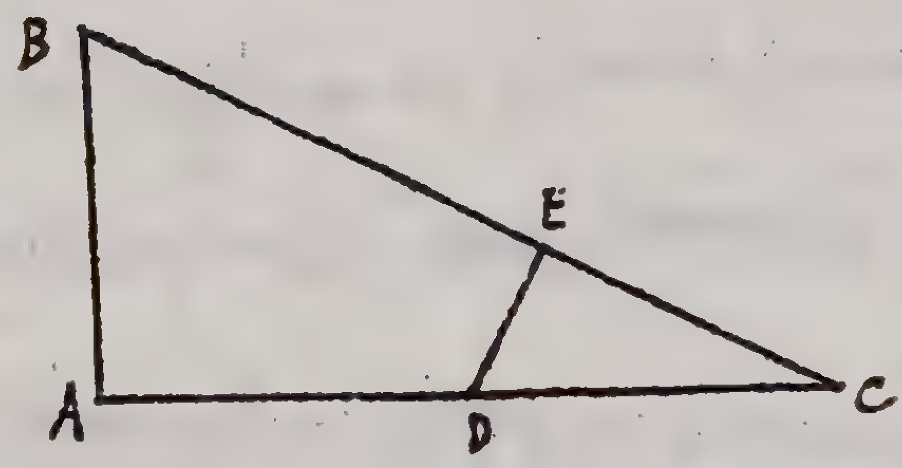


حل ـ از تشابه مثلث AHB و
BAC میتوان نوشت $\frac{BC}{AB}=\frac{AC}{AH}$
ویا $\frac{a}{c}=\frac{b}{h}$ واز آنجا
$ah = bc$ طرفین را مجذور
می کنیم $a^2h^2=b^2c^2$ و چون مثلث BAC قائم الزاویه است پس
$a^2=b^2+c^2$ ولذا $(b^2+c^2)h^2=b^2c^2$ پس از تقسیم طرفین بر b^2c^2
میشود $\frac{(b^2+c^2)h^2}{b^2c^2}=1$ ویا میتوان چنین نوشت $\frac{b^2}{b^2c^2}+\frac{c^2}{b^2c^2}=\frac{1}{h^2}$
واز آنجا

$$\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$$

مسئله ـ مثلث قائم الزاویه BAC مفروض است از نقطه D وسط ضلع بزرگتر مجاور بزاویه قائمه خط DE را عمود بر وتر BC رسم میکنیم مطلوبست محاسبه DE و EC و BE درصورتیکه میدانیم AB = ۱۲ متر AC = ۱۶ است

حل ـ ابتدا BC را محاسبه
می کنیم بدین طریق



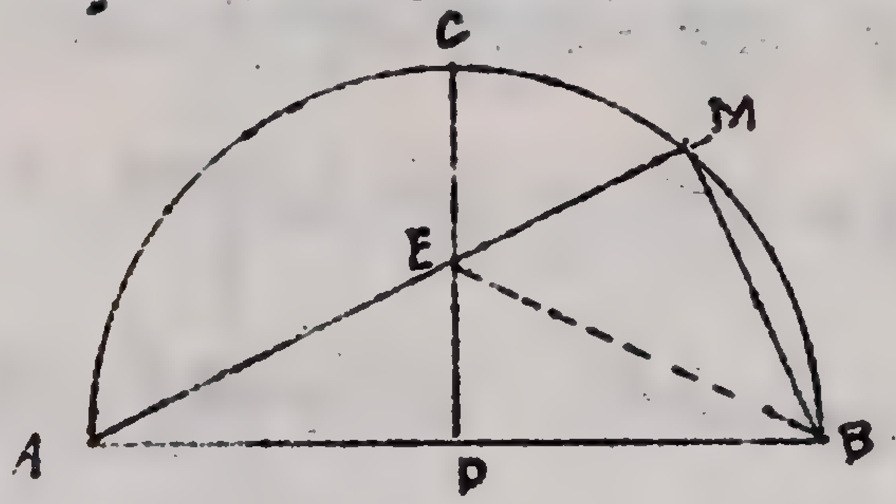
$BC^2=AC^2+AB^2$

$BC^2=16^2+12^2=400$ پس BC = ۲۰ اما ملاحظه می کنیم که مثلث
DEC و BAC متشابهند زیرا در زوایای E و A قائمه و زاویه $\hat{C}$ منطبق اند پس

در زاویه سوم نیز مساوی بوده لذا از تشابه آنها نتیجه میشود $\frac{EC}{AC}=\frac{DC}{BC}$
و یا $\frac{8}{20}=\frac{EC}{16}$ واز آنجا $EC=\frac{16\times 8}{20}=6.4$ متر واما
$BE=BC-EC=20-6.4=13.6$ متر و همچنین برای محاسبه DE مینویسیم
$\frac{DE}{AB}=\frac{DC}{BC}$ و یا $\frac{DE}{12}=\frac{8}{20}$ واز آنجا $DE=4.8$

مسئله ـ نیمدایرهٔ بقطر AB مفروض است شعاع OC را بر آن رسم نموده واز نقطه A به نقطه E وسط OC وصل نموده امتداد میدهیم تا دایره را در نقطه M تقاطع کند ثابت کنید که AM = 2MB است و ثانیاً مطلوبست محاسبه اضلاع مثلث AMB بحسب شعاع دایره

حل ـ چون مثلث AOE با مثلث AMB متشابه است زیرا زوایای $\hat{M}$ و $\hat{O}$ قائمه و در زاویه A مشترک هستند پس در زاویه سوم نیز مساوی میشوند حال که در سه زاویه متساوی شدند دو مثلث متشابه اند از تشابه این دو مثلث
نسبت اضلاع لازم میآید



پس $\frac{DE}{MB}=\frac{OA}{AM}$ واز
آنجا $\frac{AM}{MB}=\frac{OA}{OE}$ و
چون $OA=2OE$ میباشد پس $\frac{AM}{MB}=2$ واز آنجا $AM=2MB$
حال اضلاع مثلث AMB را محاسبه میکنیم اولاً میدانیم که $AB=2R$
است و برای محاسبه AM ابتدا AE را حساب می کنیم $AE^2=OA^2+OE^2$

یعنی $AE^2 = R^2 + \frac{R^2}{4} = \frac{5R^2}{4}$ پس $AE = \frac{R\sqrt{5}}{2}$ حال EM را محاسبه می‌کنیم بدینطریق که در مثلث قائم الزاویه EMB میتوان نوشت.

(۱) $EB^2 = EM^2 + MB^2$ و از طرفی نیز در مثلث AMB داریم (۲) $AB^2 = (AE+EM)^2 + MB^2$ از رابطه (۱) و (۲) نتیجه میشود

$$EB^2 - EM^2 = AB^2 - (AE+EM)^2$$ و یا

$$EB^2 - EM^2 = AB^2 - AE^2 - 2AE \times EM - EM^2$$

و پس از اختصار بدست میآید

$$EB^2 = AB^2 - AE^2 - 2AE \times EM$$

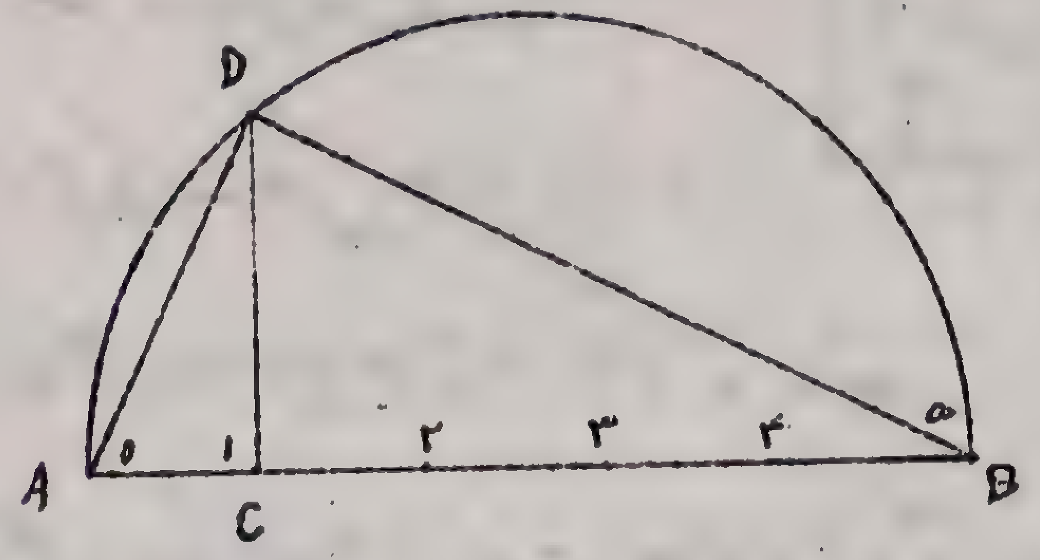
و از آنجا $EM = \frac{AB^2 - AE^2 - EB^2}{2AE}$ که چون بجای آنها مقادیرشان را قرار دهیم چنین میشود $EM = \frac{4R^2 - 2\frac{5R^2}{4}}{R\sqrt{5}}$ و یا $EM = \frac{8R^2 - 5R^2}{2\sqrt{5}R}$ و از آنجا $EM = \frac{3R}{2\sqrt{5}}$ که میشود $EM = \frac{3R\sqrt{5}}{10}$ پس $AM = AE + EM$ چنین میشود $AM = \frac{R\sqrt{5}}{2} + \frac{3R\sqrt{5}}{10}$ و یا $AM = \frac{8R\sqrt{5}}{10}$

محاسبه MB چنین است : $MB^2 = BE^2 - EM^2$ پس $MB^2 = \frac{5R^2}{4} - \frac{45R^2}{100}$ و یا $MB^2 = \frac{8R^2}{100}$ پس $MB = \frac{4R\sqrt{5}}{10}$

مسئله - نیمدایره بقطر $AB = 2R$ مفروض است قطر AB را به پنج قسمت متساوی از مبداء A تقسیم می‌کنیم از نقطه C که انتهای قسمت اول تقسیمات است عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا نیمدایره را در نقطه D قطع کند ثابت کنید اولاً در مثلث ADB ضلع BD دو برابر AD است و ثانیاً

مطلوبست محاسبه اضلاع AD و BD و ارتفاع CD بحسب شعاع R

حل. زاویه D قائمه است و مثلث ADB با مثلث ACD متشابه میباشد لذا میتوان نوشت

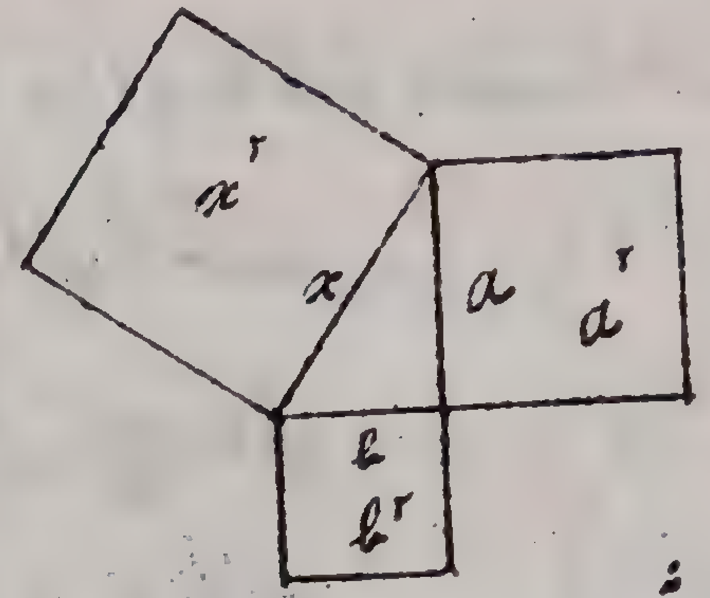


$\frac{DC}{AC} = \frac{DB}{AD}$ حال طول DC را محاسبه می‌کنیم بدین طریق که چون خط DC عمود وارد از رأس زاویه قائمه بر وتر است پس واسطه هندسی است مابین AC و CB لذا $DC^2 = \frac{2R}{5} \times \frac{8R}{5} = \frac{16R^2}{25}$ پس $DC = \frac{4R}{5}$ و چون $AC = \frac{2R}{5}$ است پس $\frac{DC}{AC} = 2$ میشود لذا $\frac{DB}{AD} = 2$ و از آنجا $DB = 2AD$ محقق است برای محاسبه اضلاع DC و DB و AD گوئیم مقدار $DC = \frac{4R}{5}$ محاسبه شد حال AD را محاسبه می‌کنیم $AD^2 = \frac{4R^2}{25} + \frac{16R^2}{25} = \frac{20R^2}{25}$ و از آنجا $AD = \frac{2R\sqrt{5}}{5}$ و چون $BD = 2AD$ است پس $BD = \frac{4R\sqrt{5}}{5}$

مسئله - مربعی بسازید معادل با مجموع دو مربع مفروض M و N

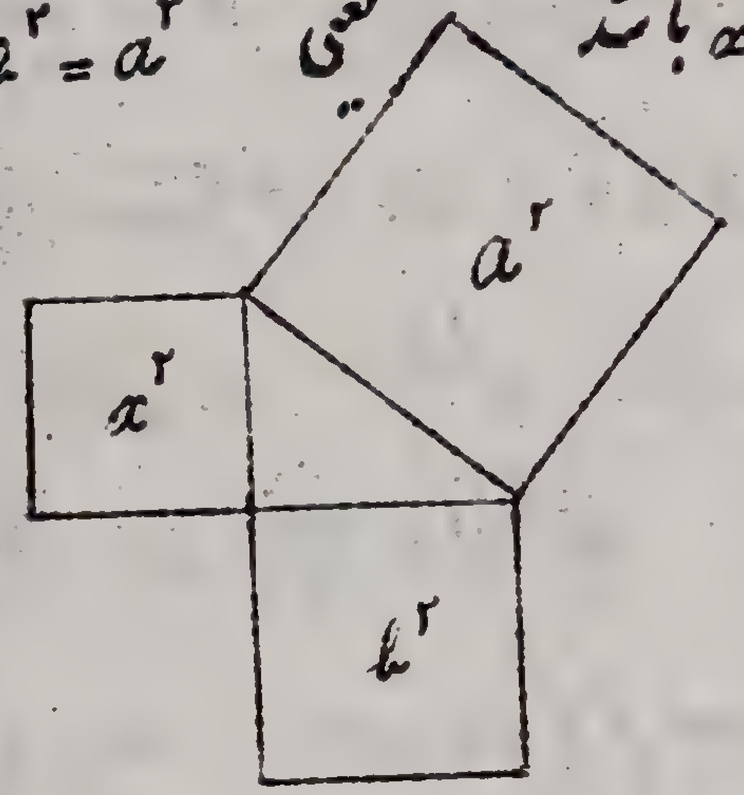
حل - فرض می‌کنیم مساحت مربع مفروض M برابر a^2 و مساحت مربع N برابر b^2 باشد پس مطلوب مربعی به ضلع x بمساحت x^2 پیدا شود بطریقی که $x^2 = a^2 + b^2$ گردد و از این رابطه مفهوم میشود که x باید وتر

مثلث قائم الزاویه باشد که دو ضلع مجاور بزاویه قائمه آن a و b باشد پس این مثلث را میسازیم



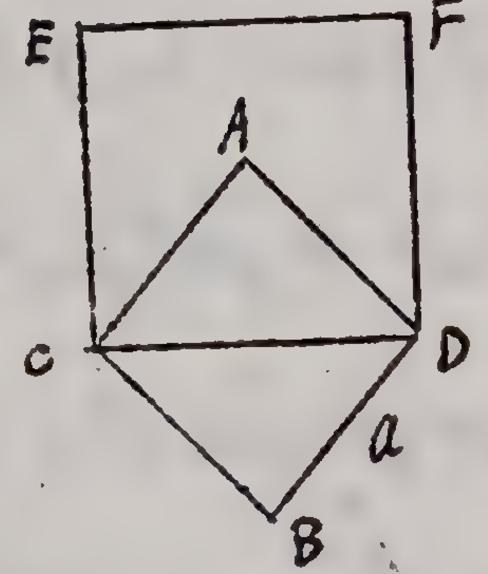
مسئله - مطلوبست رسم مربعی که مساحتش برابر تفاضل دو مربع مفروض M و N باشد

حل - اگر مساحت مربع M مفروض a^2 و مساحت مربع مفروض N مساوی b^2 باشد باید $a^2 - b^2 = x^2$ باشد یعنی $x^2 + b^2 = a^2$



از این رابطه معلوم میشود که باید مثلث قائم الزاویه ساخت که وترش مساوی a و یک ضلع مجاور قاعده‌اش b و ضلع دیگر مجاور قاعده x باشد این مثلث را میسازیم

مسئله - مربعی بسازید که مساحتش دو برابر مربع مفروض M باشد



حل - اگر a^2 مساحت مربع مفروض M بضلع a باشد باید مساحت مربع مطلوب یعنی x^2 مساوی $2a^2$ شود یعنی $x = a\sqrt{2}$ و چون قطر مربع M که ABCD است

مساوی $a\sqrt{2}$ میباشد پس ضلع مربع مطلوب CDEF است

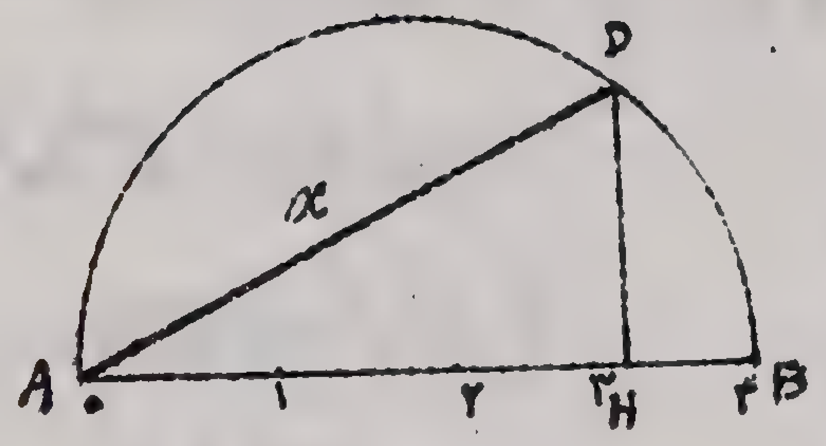
مسئله - مربعی بسازید که مساحتش $\frac{3}{4}$ مساحت مربع مفروض M باشد

حل - اگر مربع M بضلع a باشد مساحتش a^2 و اگر مساحت مربع مطلوب را x^2 فرض کنیم باید $\frac{x^2}{a^2} = \frac{3}{4}$ باشد

حل - نیمدایره بقطر $AB = a$ رسم میکنیم و AB را بچهار قسمت مساوی تقسیم نموده از نقطه H که $\frac{3}{4}AB$ است عمودی اخراج نموده تا نیمدایره را در نقطه D قطع کند نقطه D را به A وصل نموده میگوئیم AD ضلع مربع مطلوب میباشد. زیرا

$$x^2 = AD^2 = DH^2 + AH^2$$

اما $DH^2 = AH \times HB$ که چون بجایش بگذاریم

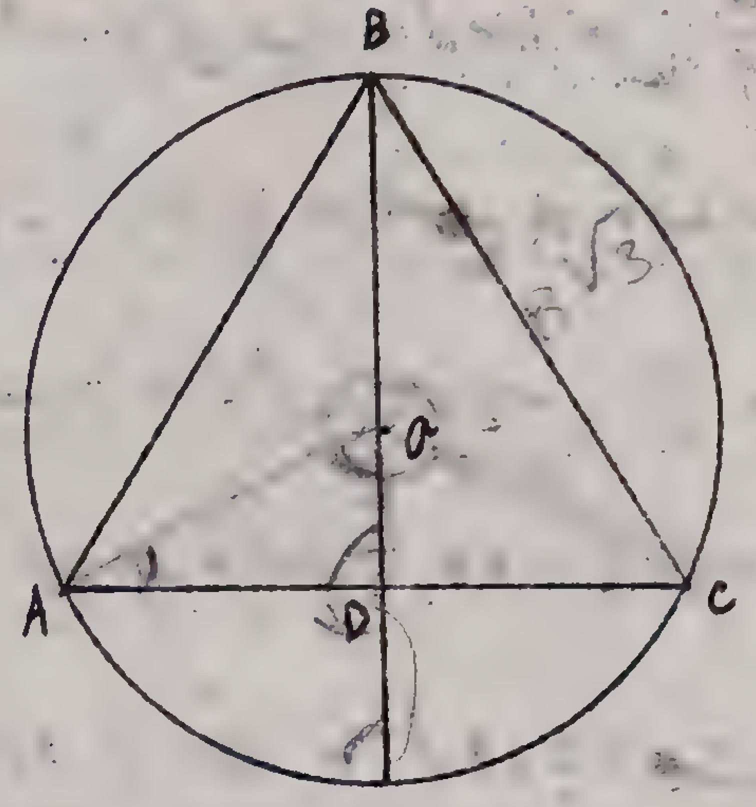


$AD^2 = AH \times HB + AH^2$ و یا $AD^2 = AH(HB + AH)$ و یا $AD^2 = AH \times AB$ اما میدانیم که $AB = a$ و $AH = \frac{3a}{4}$ میباشد پس $x^2 = AD^2 = \frac{3a}{4} \times a$ و از آنجا $x^2 = \frac{3a^2}{4}$ یعنی $\frac{x^2}{a^2} = \frac{3}{4}$

مسئله - مطلوبست محاسبه مساحت مثلث متساوی الاضلاع بحسب شعاع دایره محیطیه اش

حل - میدانیم که ضلع مثلث محاطی مساویست با $R\sqrt{3}$ پس کافیست

که ارتفاع این مثلث را حساب کنیم لذا از مثلث قائم الزاویه BDC میتوان نتیجه گرفت



$BC^2 = BD^2 + DC^2$ و یا

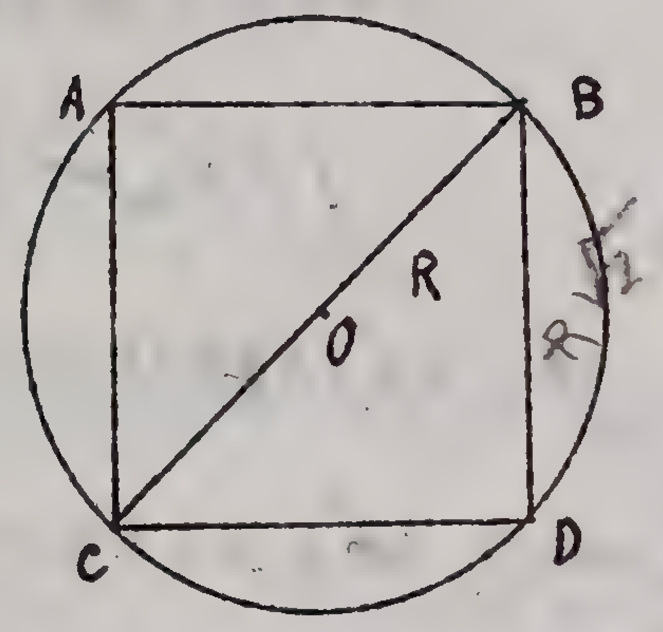
$3R^2 = BD^2 + \frac{3R^2}{4}$ واز آنجا

پس $BD^2 = 3R^2 - \frac{3R^2}{4}$

که $BD^2 = \frac{12R^2 - 3R^2}{4}$

مساویست با $\frac{9R^2}{4}$ لذا $BD = \frac{3R}{2}$ حال مساحت مثلث که مساویست با $\frac{AC \times BD}{2}$ میشود $S = \frac{R\sqrt{3} \times 3R}{4} = \frac{3R^2}{4}\sqrt{3}$

مسئله - مطلوبست مساحت مربع محاطی بحسب شعاع دایره محیطیه آن

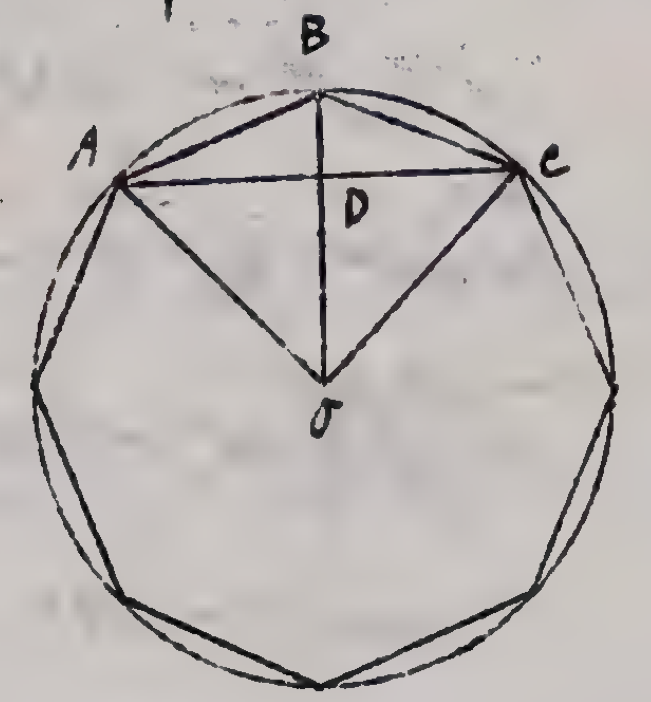


حل - ضلع مربع محاطی برابر است با $R\sqrt{2}$ چه اگر ضلع مربع را x فرض کنیم چون BC قطر مربع قطر دایره است پس $2x^2 = 4R^2$ پس $x^2 = 2R$ و $x = R\sqrt{2}$ و مساحت مربع x^2 مساویست با $2R^2 = R\sqrt{2} \times R\sqrt{2}$

مسئله - مطلوبست مساحت هشت ضلعی منتظم بحسب شعاع دایره محیطیه اش

حل - مساحت این هشت ضلعی برابر است با ۸ برابر مساحت مثلث

OAB پس کافیست مساحت این مثلث را حساب کنیم



مساحت $AOB = \frac{1}{2} OB \times AD$

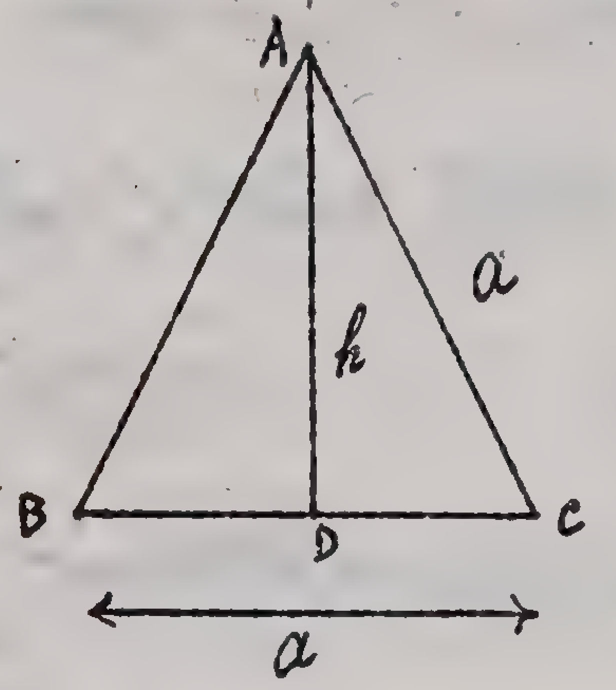
یعنی $AOB = \frac{1}{2} R \times AD$

مساحت اما چون AC ضلع مربع محاطی است و مقدارش برابر است با $R\sqrt{2}$ پس AD که نصف آنست مساویست با $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ لذا

سطح $AOB = \frac{1}{2} R \times \frac{R\sqrt{2}}{2}$ واز آنجا مساحت $AOB = \frac{R^2\sqrt{2}}{4}$ وبالاخره

مساحت هشت ضلعی $= \frac{8R^2\sqrt{2}}{4} = 2R^2\sqrt{2}$

مسئله - مطلوبست مساحت مثلث متساوی الساقین بضلع a



حل - $S = \frac{BC \times AD}{2}$

اما $AD^2 = AC^2 - DC^2$

پس $AD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

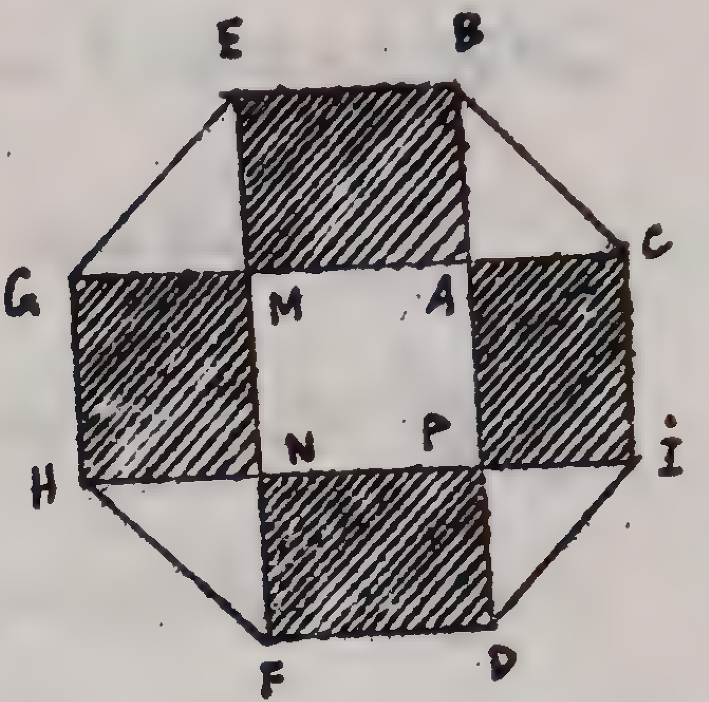
واز آنجا $AD^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

پس $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و $S = \frac{a \times a\sqrt{3}}{4}$ پس $S = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

مسئله - مطلوبست مساحت هشت ضلعی منتظم بحسب ضلعش

حل - اگر ضلع هشت ضلعی را a فرض کنیم و خطوط BD و EF و همچنین CG و IH را رسم کنیم این خطوط یکدیگر را عموداً قطع می کنند پس لاخط

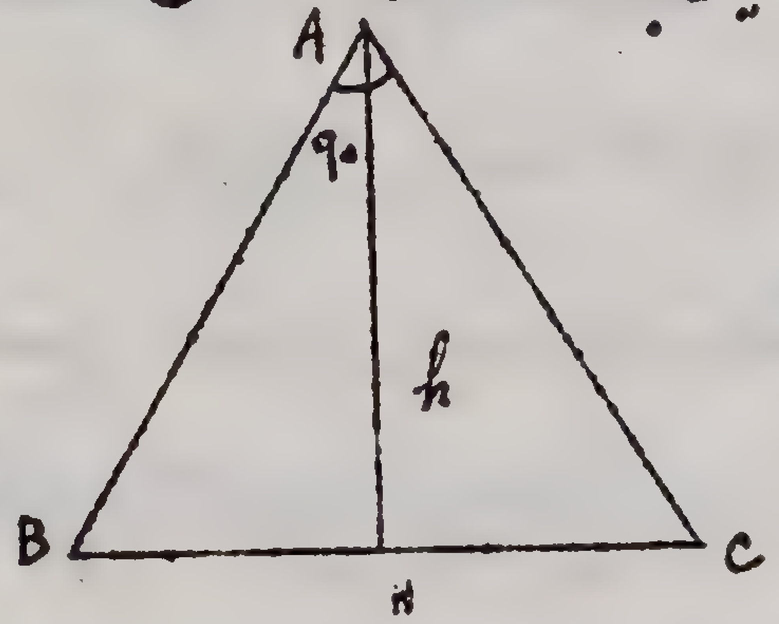
میشود که هشت ضلعی به ۹ قسمت میشود بدین ترتیب که مربع AMNP بضلع a میباشد و مساحتش برابر است با a^2 و چهار مثلث متساوی الساقین که مساحت یکی از آنها مثلاً ABC مساویست با



$\frac{AC \times AB}{2}$ و چون $AB = AC$ است پس مساویست $\frac{AB^2}{2}$ اما $a^2 = 2AB^2$ واز آنجا $AB^2 = \frac{a^2}{2}$ و $\frac{AB^2}{2} = \frac{a^2}{4}$ پس مساحت ۴ مثلث مساویست با $4 \times \frac{a^2}{4} = a^2$ پس بالاخره باقی میماند چهار مربع مستطیل که مساحت یکی از آنها مساویست با $a \times AB$ اما چون $AB^2 = \frac{a^2}{2}$ پس $AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ بنابراین $a \times \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ مساحت یک مستطیل و مساحت ۴ مستطیل برابر است با $\frac{4a^2\sqrt{2}}{2}$ یعنی $2a^2\sqrt{2}$ و بالاخره مساحت هشت ضلعی چنین میشود

$$S = a^2 + a^2 + 2a^2\sqrt{2} = 2a^2(1 + \sqrt{2})$$

مسئله - مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین بساق a مفروض است مطلوبست مساحت آن



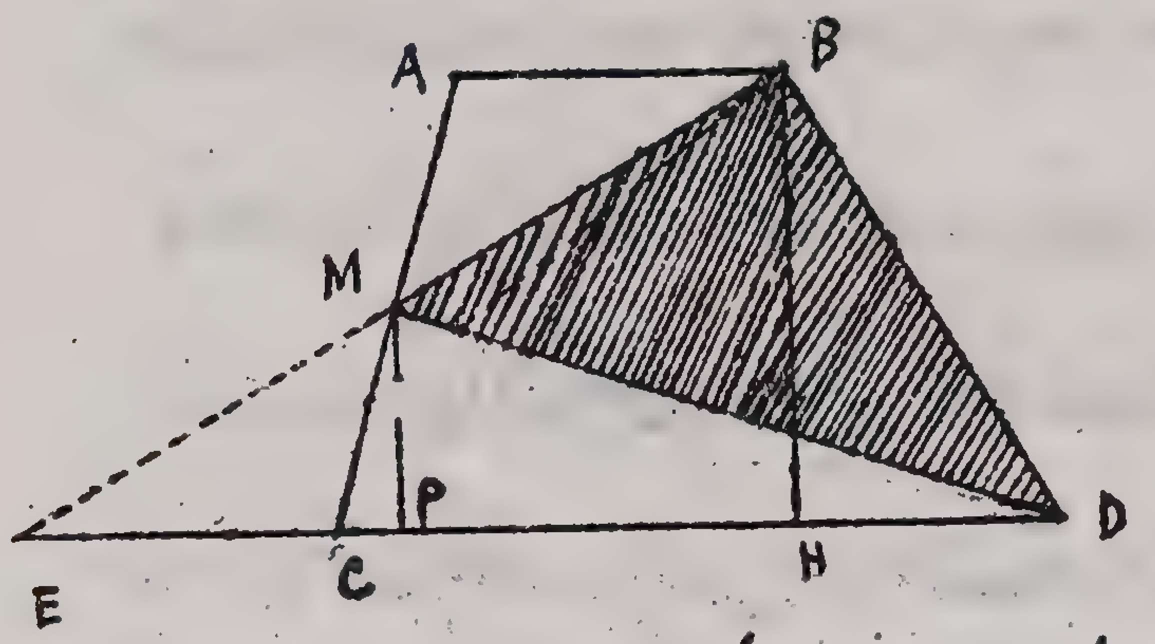
حل - چون مثلث قائم الزاویه است پس $BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ واز آنجا $BC = a\sqrt{2}$ و همچنین میتوان نوشت $h^2 = a^2 - \frac{BC^2}{4}$ و یا

$h^2 = a^2 - \frac{2a^2}{4}$ پس $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ لذا $S = \frac{BC \times h}{2}$ میشود $S = \frac{a\sqrt{2} \times a\sqrt{2}}{4}$ پس

$$S = \frac{a^2}{2}$$

مسئله - ذوزنقه ABCD مفروض است از نقطه M وسط AC به نقاط B و D وصل می‌کنیم ثابت کنید که مساحت مثلث MBD نصف مساحت ذوزنقه است

حل - خط MB را امتداد میدهیم تا در نقطه E امتداد خط DC را قطع کند میدانیم که مثلث AMB مساوی مثلث EMC میباشد پس

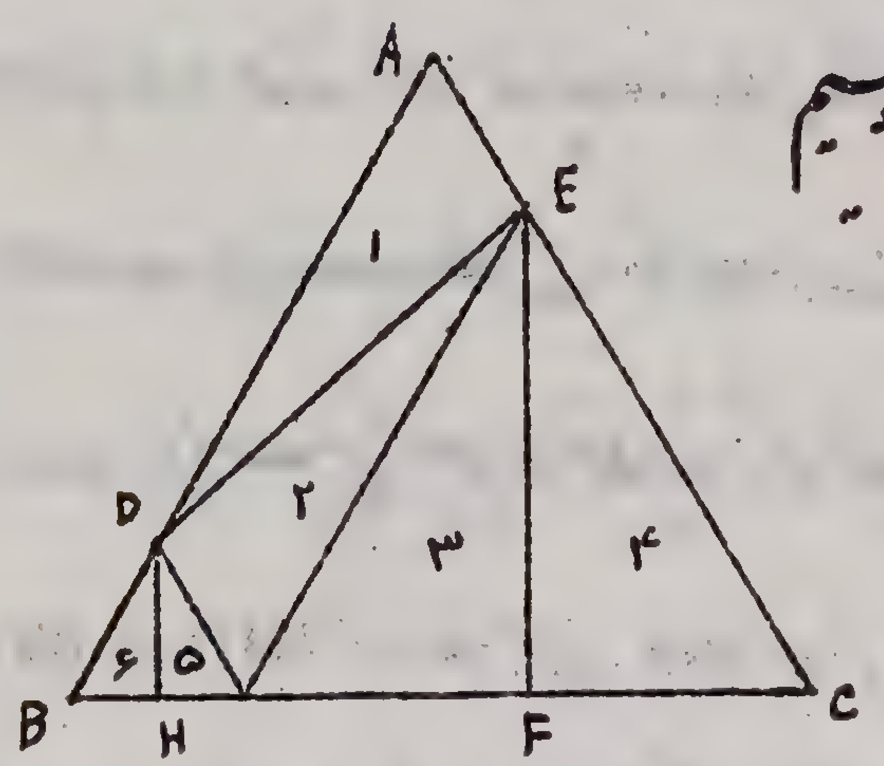


$AB = EC$ است لذا مساحت مثلث BED معادل مساحت ذوزنقه میباشد حال اگر ثابت کنیم که مساحت مثلث MBD معادل نصف مثلث BED است حکم ثابت است برای اینکار از نقطه MP را رسم می‌کنیم ملاحظه میشود که نصف ارتفاع BH است زیرا در مثلث EBH خط MP از وسط ضلع EB بموازات قاعده رسم شده برابر نصف قاعده است پس مثلث MED که در قاعده با مثلث EBD مشترک است و ارتفاعش نصف آنست بتحقیق مساحتش نصف آن خواهد بود پس وقتیکه مساحت مثلث MED نصف مثلث EBD شد لازم میآید که مساحت مثلث

MBD نیز نصف آن باشد یعنی معادل نصف ذوذنقه باشد

مسئله ـ مثلث متساوی الساقین ABC مفروض است از نقطه O واقع در روی قاعده آن دو خط OD و OE را بموازات ساقین مثلث رسم میکنیم و از نقاط D و E دو عمود DH و EF بر قاعده فرود آوریم ثابت کنید که مساحت ذوذنقه EFDH معادل نصف مساحت مثلث ABC است

حل ـ در متوازی الاضلاع ODAE ملاحظه میشود که DE قطر است و آنرا بدو مثلث متساوی تقسیم میکند چون مثلث BDO متساوی الساقین است زیرا زاویه $\hat{DOB}$ مساوی $\hat{ACB}$ و چون $\hat{ABC} = \hat{ACB}$ است پس $\hat{ABC} = \hat{DOB}$ و مثلث متساوی الساقین میشود یعنی $DB = DO$ است پس DH آنرا بدو مثلث متساوی تقسیم میکند و همچنین EF مثلث متساوی الساقین EOC را بدو مثلث متساوی تقسیم میکند پس بترتیب مینویسیم



سطح (۱) = سطح (۲)

سطح (۴) = سطح (۳)

سطح (۶) = سطح (۵)

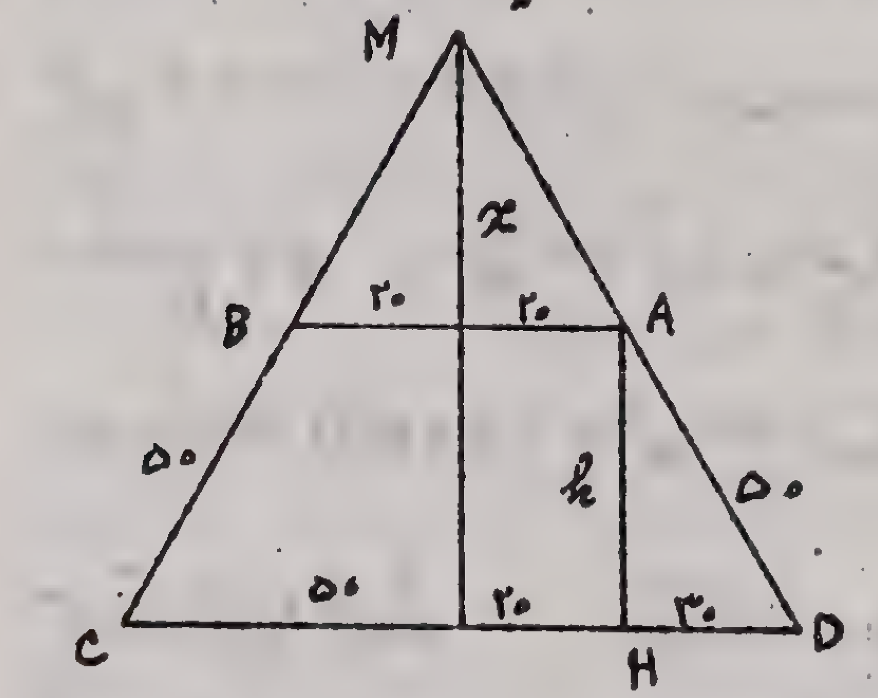
و از آنجا نتیجه میشود سطح (۶) + سطح (۴) + سطح (۱) = سطح (۵) + سطح (۳) + سطح (۲)

پس سطح ذوذنقه DHEF = $\frac{\text{سطح مثلث } ABC}{2}$

مسئله ـ زمینی است بشکل ذوذنقه متساوی الساقین که قاعدتین آن

۱۰۰ متر و ۴۰ متر میباشند و دو ساق آن هریک ۵۰ متر است مطلوبست مساحت این زمین و مساحت زمین مثلث شکلی که از امتداد دو ساق بدست میآید

حل ـ مساحت ذوذنقه برابر است با نصف مجموع قاعدتین ضرب در ارتفاع یعنی $S = \left(\frac{100+40}{2}\right) h$ و یا $S = 70\,h$ و برای محاسبه h عمود AH را رسم کرده چنین مینویسیم $50^2 = h^2 + 30^2$ و از آنجا $h^2 = 1600$ پس $h = 40$ پس $S = 70 \times 40$ یعنی $S = 2800$ ثانیاً مساحت مثلث MCD کافیست مساحت مثلث MAB را بمساحت ذوذنقه افزود و برای اینکار ارتفاع x از مثلث MAB را بترتیب زیر حساب میکنیم

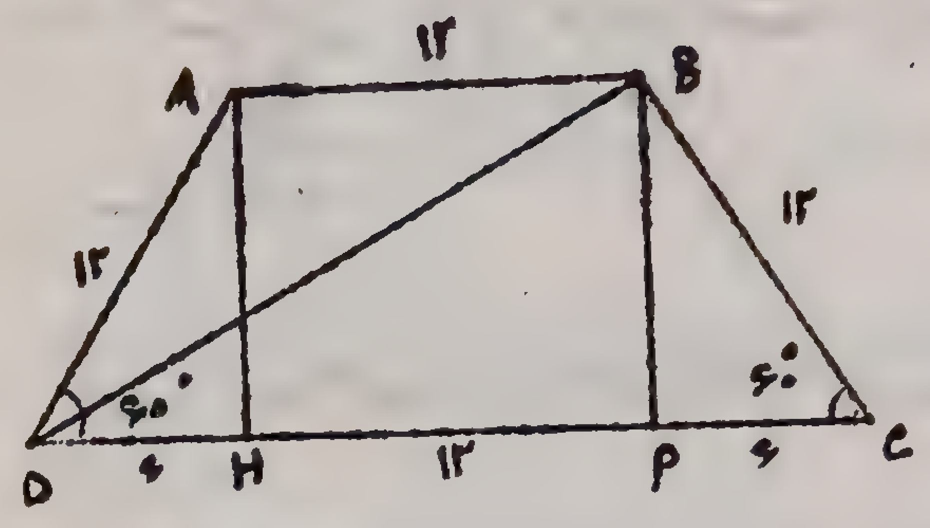


$\frac{20}{50} = \frac{x}{x+40}$ و یا $\frac{2}{5} = \frac{x}{x+40}$ پس $5x = 2x + 80$ یعنی $x = \frac{80}{3}$ و مساحت مثلث MAB چنین میشود $S = \frac{40 \times 80}{6}$ یعنی $S = \frac{3200}{6}$ و بالاخره مساحت مثلث MCD برابر است با $2800 + \frac{3200}{6}$ یعنی $\frac{10000}{3}$ متر مربع

مسئله ـ در ذوذنقه متساوی الساقین دو ساق آن مساوی قاعده کوچکتر و برابر ۱۲ متر میباشد و زوایای D و C هر کدام ۶۰ درجه میباشند مطلوبست اولاً محاسبه ارتفاع و مساحت و قطر این ذوذنقه ثانیاً

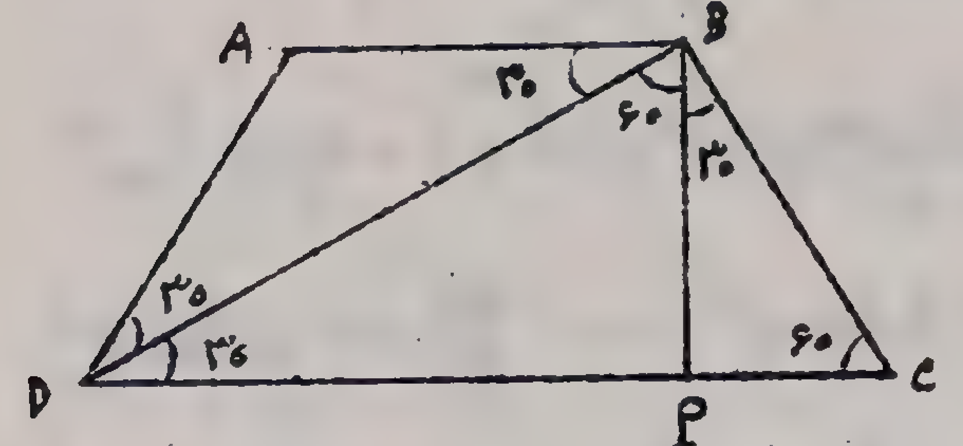
ثابت کنید که قطر BD عمود است بر ساق BC

حل از نقاط A و B دو عمود AH و BP را فرود آورده معلوم است که HP مساوی ۱۲ متر میباشد و DH = PC است ولی میدانیم



که در مثلث قائم الزاویه هرگاه یکی از زوایای حاده دو برابر دیگری شد یعنی یکی ۶۰ درجه و دیگری ۳۰ درجه ضلع مقابل به زاویه ۳۰ درجه برابر نصف وتر است پس DH = PC = ۶ متر است بنابراین از مثلث ADH میتوان بسهولت ارتفاع AH را محاسبه نمود بدینطریق که $12^2 = 6^2 + AH^2$ یعنی $AH^2 = 108$ و $AH = \sqrt{108}$ حال مساحت را حساب می‌کنیم $S = \left(\frac{AB+DC}{2}\right)h$ یعنی $S = \left(\frac{12+24}{2}\right)\sqrt{108}$ ویا $S = 18\sqrt{108}$ و چون $\sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3}$ یعنی $6\sqrt{3}$ پس $S = 108\sqrt{3}$ اینک قطر BD را محاسبه میکنم از مثلث قائم الزاویه BPD بدینطریق که $DB^2 = BP^2 + PD^2$ یعنی $DB^2 = 108 + 324$ و $BD^2 = 432$ و از آنجا $DB = \sqrt{432}$ ویا $DB = \sqrt{144 \times 3} = 12\sqrt{3}$ ثانیاً ثابت کنید که قطر BD بر ساق BC عمود است زیرا مطابق شکل زیر ملاحظه میشود که چون مثلث ABD متساوی الساقین است پس ABD مساوی $A\hat{D}B$ میباشد ولی زاویهٔ

ABD مساوی DBC است پس $B\hat{D}C = A\hat{D}B$ میشود که هرکدام ۳۰ درجه خواهند شد پس زاویه ABD نیز ۳۰ درجه است اما زاویه PBC نیز ۳۰ درجه است

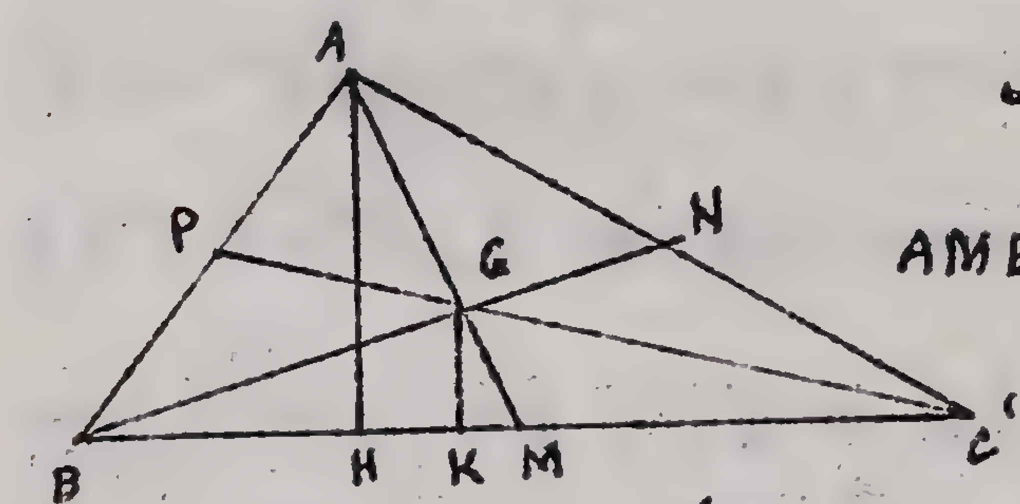


و در مثلث قائم الزاویه BPC چون زاویه BDC برابر ۳۰ درجه است پس DBP مساوی ۶۰ درجه خواهد بود و بنابراین زاویه DBC مساوی

PBC + DBP = ۳۰ + ۶۰ = ۹۰ درجه میشود

مسئله - مثلث ABC مفروض است ثابت کنید که مساحت بین بر میانه و یک ضلع معادل ثلث مساحت مثلث میباشد

حل - میانه های AM و BN و CP را رسم می‌کنیم در نقطه G تقاطع می‌کنند میخواهیم ثابت کنیم که مساحت مثلث GAB ثلث مثلث ABC میباشد و مساحات GBC و GAC نیز هرکدام ثلث مثلث ABC میباشند برای اثبات



گوئیم مساحت GAB = مساحت AMB - مساحت GBM (۱)

حال اگر قاعده را a و ارتفاع را h فرض کنیم مساحت مثلث ABC $\frac{ah}{2}$ میشود و مساحت $AMB = \frac{a}{2} \times \frac{h}{2}$ و برای محاسبهٔ مساحت

BGM کافیست ارتفاع GK را حساب کنیم زیرا قاعده آن همان $BM = \frac{a}{2}$ میباشد پس گوئیم در مثلث AMH $\frac{AM}{GM} = \frac{AH}{GK}$ و چون G محل تلاقی میانه‌ها هر یک طوری تقسیم میکند که $AG = 2GM$ یعنی $AM = 3GM$ است پس $\frac{AH}{GK} = 3$ و از آنجا $AH = 3GK$ بنابراین $GK = \frac{h}{3}$ است پس مساحت BGM $= \frac{a}{2} \times \frac{h}{6} = \frac{ah}{12}$ بنابراین رابطهٔ (۱) چنین میشود

مساحت GAB $= \frac{ah}{4} - \frac{ah}{12} = \frac{3ah - ah}{12} = \frac{2ah}{12} = \frac{ah}{6}$ و چون مساحت مثلث ABC مساوی $\frac{ah}{2}$ است ملاحظه میشود که $\frac{ah}{6}$ برابر ثلث آن میباشد

حال گوئیم مساحت GBC = مساحت GBM + مساحت GCM و چون مثلث GBM و GCM در قاعده و ارتفاع مساوی هستند لذا

مساحت GBC $= 2 \times$ مساحت GBM $= 2 \times \frac{ah}{12} = \frac{ah}{6}$ و بالاخره

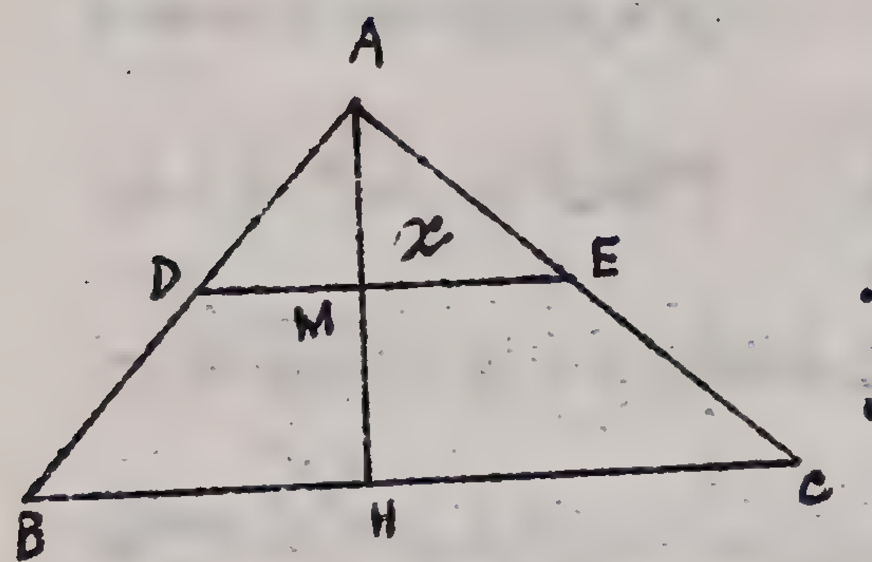
مساحت GAC $= \frac{ah}{2} - \frac{ah}{6} - \frac{ah}{6} = \frac{ah}{2} - \frac{2ah}{6} = \frac{ah}{6}$

مسئله ـ مثلث قائم الزاویه ABC که در رأس A قائمه است و اضلاع مجاور بزاویه قائمه آن بترتیب برابر ۴۰ و ۳۰ متر طول دارند مفروض میباشد بچه فاصله از رأس A خط DE را بموازات قاعده BC رسم کنیم که مساحت مثلث ADE مساوی ۱۵۰ متر مربع گردد

حل ـ اولا وتر BC را محاسبه می کنیم $BC^2 = 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500$

پس $BC = 50$ متر حال گوئیم مساحت مثلث ABC برابر است با

$\frac{AC \times AB}{2} = \frac{40 \times 30}{2} = 600$ متر مربع ولی اگر قاعده را BC و ارتفاع را AH بگیریم مساحت مثلث میشود $\frac{50h}{2}$ پس $\frac{50h}{2} = 600$ و از آنجا $h = 24$ متر میگردد حال خط DE را از نقطه M بفاصله x از A بموازات



BC رسم می کنیم باید x طوری باشد که مساحت مثلث ADE برابر ۱۵۰ متر مربع گردد یعنی $150 = \frac{DE \times x}{2}$ و از آنجا $DE \times x = 300$ پس $x = \frac{300}{DE}$

ولی از طرفی نظر به تشابه دو مثلث ABC و ADE میتوان نوشت

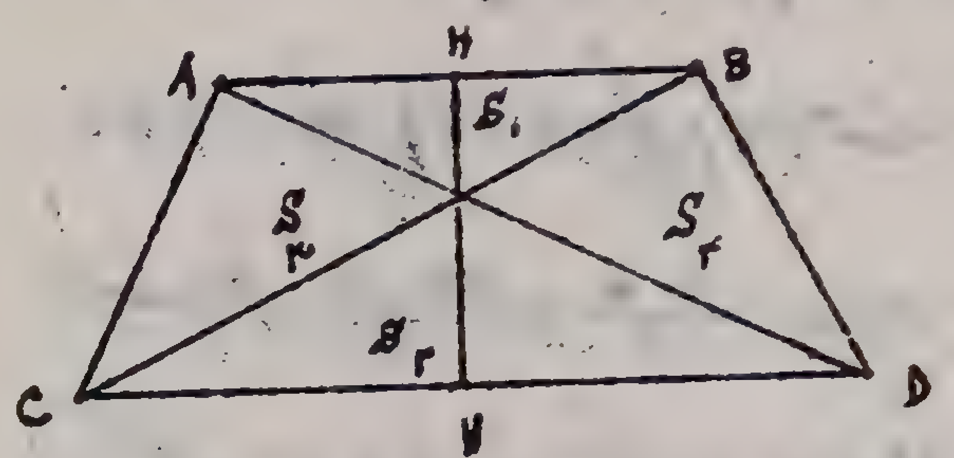
$\frac{x}{24} = \frac{DE}{50}$ و از آنجا $DE = \frac{50x}{24}$ پس $x = \frac{300 \times 24}{50x}$ یعنی

$50x^2 = 300 \times 24$ و یا $x^2 = \frac{300 \times 24}{50}$ یعنی $x^2 = 144$ و $x = 12$

مسئله ـ ذوزنقه متساوی الساقین که قاعده اطول آن ۱۰۰ متر و قاعدهٔ اقصرش ۶۰ متر و ارتفاعش ۴۰ متر است مفروض میباشد دو قطر BC و AD را رسم میکنیم که در نقطه O تقاطع می کنند مطلوبست محاسبه مساحات هر یک از چهار مثلثی که بوسیله دو قطر ایجاد میشود

حل ـ مساحت هر یک از مثلث‌ها را به S_1 و S_2 و S_3 و S_4 نمایش میدهیم و حال ثابت می کنیم که $S_3 = S_4$ است زیرا دو مثلث ADC و BDC متساوی هستند (ض. ض. ض) و از حیث مساحت نیز چون

در قاعده و ارتفاع متساوی هستند مساوی میباشند و چون از هر دو مساحت مثلث DCO را کم نمائیم



باقیمانده‌ها مساوی میشوند یعنی $S_4 = S_3$ میشود و برای محاسبه مساحات S_1 و S_2 باید ارتفاعات OH و OH' حساب شود که بترتیب زیر محاسبه می‌کنیم چون دو مثلث OAB و OCD متشابهند پس $\frac{OH}{OH'} = \frac{100}{60}$

یعنی $\frac{OH}{OH'} = \frac{5}{3}$ و یا $3OH = 5OH'$ و چون $OH + OH' = 40$ است

یعنی $OH' = 40 - OH$ پس $3OH = 5(40 - OH)$ و از آنجا $OH = \frac{200}{8}$

یعنی $OH = 25$ و $OH' = \frac{3 \times 25}{5} = 15$ متر میگردد حال مساحات بترتیب زیر عبارتند از

$S_1 = \frac{60 \times 15}{2} = 450$ متر مربع و $S_2 = \frac{100 \times 25}{2} = 1250$

و OCD مساحت − ACD مساحت $= S_4 = S_3$ یعنی

$$S_3 = S_4 = \frac{100 \times 40}{2} - 1250 = 750$$

مسئله ـ دایره O بقطر $AB = 8$ متر مفروض است از نقاط A و B دو مماس AC و BD را بر دایره رسم میکنیم و BD را مساوی ۳ متر اختیار کرده از نقطه D مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا خط مماس AC را در نقطه C قطع کند مطلوبست اولاً اثبات آنکه $BD + AC = DC$ ثانیاً مثلث DOC در زاویه O قائمه است و ثالثاً $R^2 = DM \cdot MC$ بنابر محاسبه AC و OC و OD

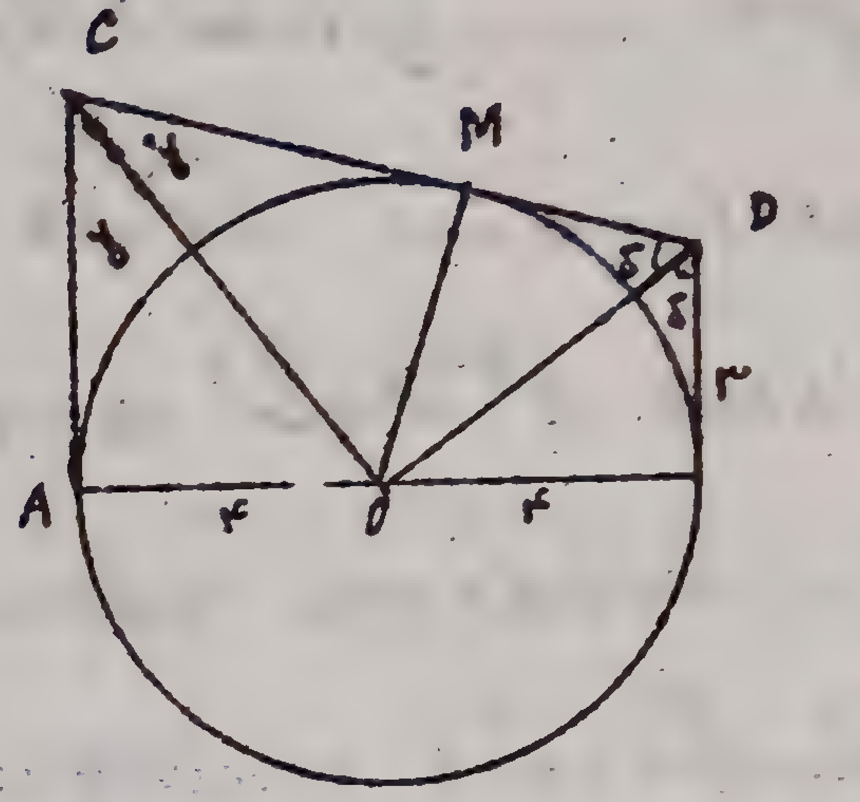
حل ـ میدانیم که هرگاه از نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم باهم مساویند پس $DM = DB$ و $CM = CA$ و یا $AC + DB = CM + MD$ پس $AC + DB = CD$ ثانیاً در چهارضلعی ACDB دو زاویه B و A قائمه اند پس مجموع زوایای D و C مساوی دو قائمه خواهد بود و اما چون مثلث DOM و DOB متساویند پس زاویه $O\hat{D}M = O\hat{D}B$ و همچنین دو مثلث OCM و OCA متساویند پس زوایای $O\hat{C}A = O\hat{C}M$ یعنی $2\gamma + 2\delta = 180^\circ$ و از آنجا $\gamma + \delta = 90^\circ$ پس در مثلث COD باید زاویه $\hat{O}$ قائمه باشد ثالثاً چون مثلث COD قائم الزاویه شد پس عمود وارد از رأس زاویه قائمه بر وتر واسطه هندسی است مابین دو قطعه که از وتر جدا میشود

یعنی $OM^2 = MC \times MD$ و یا $R^2 = MC \times MD$

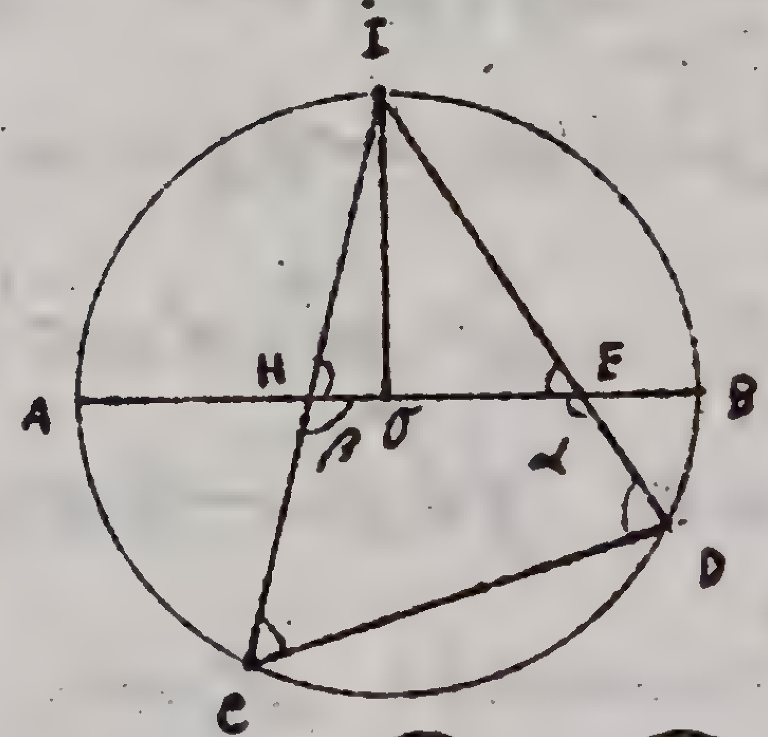
رابعاً ـ برای محاسبه OD از مثلث قائم الزاویه OBD نتیجه میگیریم

یعنی $OD^2 = OB^2 + BD^2$ پس $OD^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ پس $OD = 5$

و برای محاسبه AC گوئیم $R^2 = MC \times MD$ اما $AC = MC$ و $MD = BD = 3$ متر میباشد پس $16 = 3AC$ و از آنجا $AC = \frac{16}{3}$ و برای محاسبه OC گوئیم $OC^2 = AC^2 + OA^2$ چون AC و OA معلومند پس OC نیز محاسبه میشود



مسئله - دایره O بقطر AB مفروض است خط OI را عمود بر قطر AB رسم میکنیم وازنقطه I به دو سر وتر CD وصل می کنیم که قطر AB را این خط ها در نقاط H و E قطع می کنند ثابت کنید اولاً که زاویه OEI مساویست با ICD ثانیاً مثلث IHE متشابه است با مثلث ICD واز تشابه آنها این نسبت $IE \times ID = IH \times IC$ برقرار است ثالثاً چهارضلعی HEDC قابل محاط شدن در دایره است



حل - اندازه زاویه محاطی برابر است با نصف قوس مقابلش یعنی $\frac{\widehat{ID}}{2}$ واما اندازه زاویه $\hat{E}$ برابر است با $\frac{\widehat{IA}+\widehat{DB}}{2}$ وچون $\widehat{IA}=\widehat{IB}$ پس $\hat{E}=\frac{\widehat{IB}+\widehat{BD}}{2}=\frac{\widehat{ID}}{2}$.
پس زاویه $\hat{E}=\hat{C}$ است ثانیاً چون دو مثلث IHE و ICD در زاویه I مشترک وزاویه $\hat{E}$ مساوی $\hat{C}$ میباشد پس در زاویه سوم یعنی

$\hat{H}$ و $\hat{D}$ نیز مساوی بوده پس متشابهند واز تشابه آنها لازم میآید $\frac{IE}{IC}=\frac{IH}{ID}$ یعنی $IE \times ID = IH \cdot IC$ ثالثاً برای اثبات آنکه چهارضلعی HEDC قابل محاط شدن در دایره است کافیست ثابت کنیم زوایای مقابل مکمل یکدیگرند وچون میدانیم که $\hat{\alpha}+\hat{E}=180°$ و $\hat{H}+\hat{\beta}=180°$ است وچون $\hat{C}=\hat{E}$ و $\hat{H}=\hat{D}$ است پس لازم میآید $\hat{C}+\hat{\alpha}=180°$ و $\hat{\beta}+\hat{D}=180°$ باشد پس چهارضلعی قابل محاط شدن در دایره میباشد

مسئله دایره بقطر AB مفروض است از نقطه P در روی AB وتر EF را عمود بر آن رسم می کنیم که وتر غیر مشخص AC را در نقطه D قطع میکند ثابت کنید که رابطه زیر برقرار است (۱) $AC \times AD = AB \cdot AP$

حل - رابطه (۱) را ممکن است بدینصورت نیز نوشت

$$(AD+DC)AD=(AP+PB)AP$$

یعنی $AD^2+DC\cdot AD=AP^2+AP\times PB$

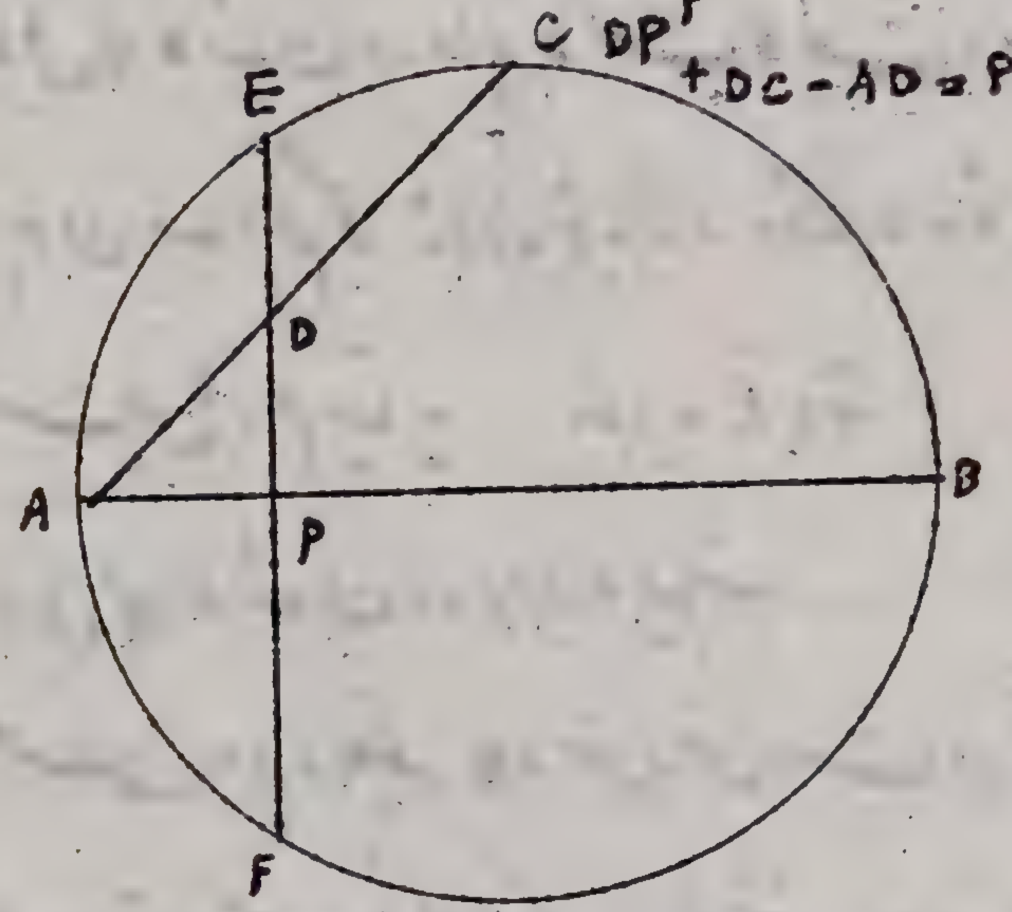
اما در مثلث قائم الزاویه APD میتوان نوشت $AD^2=AP^2+PD^2$ پس $AP^2+PD^2+DC\cdot AD=AP^2+AP\times PB$ وچون AP^2 از طرفین حذف شود باقی میماند $PD^2+DC\cdot AD=AP\times PB$

اما چون $AP\times PB=PE\times PF$ وچون $PE=PF$ پس $AP\times PB=PE^2$ پس باید ثابت کنیم که $OP^2+DC\cdot AD=PE^2$ است چه اگر این رابطه

محقق باشد قطعاً رابطه (۱) نیز محقق و مسلم است و برای اینکار گوئیم

$PE = PD + ED$ پس $PE^2 = PD^2 + ED^2 + 2DP \cdot ED$ و چون بجایش قرار

دهیم میشود $DP^2 + DC \cdot AD = PD^2 + ED^2 + 2DP \cdot ED$



و پس از اختصار چنین میشود

$DC \cdot AD = ED(ED + 2DP)$

که میتوان چنین نوشت

$DC \cdot AD = ED(ED + DP + DP)$

و چون $PF = EP = ED + DP$ پس $DC \cdot AD = ED(PF + DP)$

اما $PF + DP = DF$ است پس $DC \cdot AD = ED \cdot DF$ و امیدانیم که این رابطه

در مورد دو وتر متقاطع AC و EF محرز و مسلم است پس بتحقیق رابطه (۱)

محقق میباشد

مسئله ـ از رأس C در یک مثلث متساوی الساقین خطی چنان رسم میکنیم

که قاعدهٔ AB را در نقطه D و دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطه E قطع می‌کند ثابت

کنید که (۱) $AC^2 = CD \times CE$

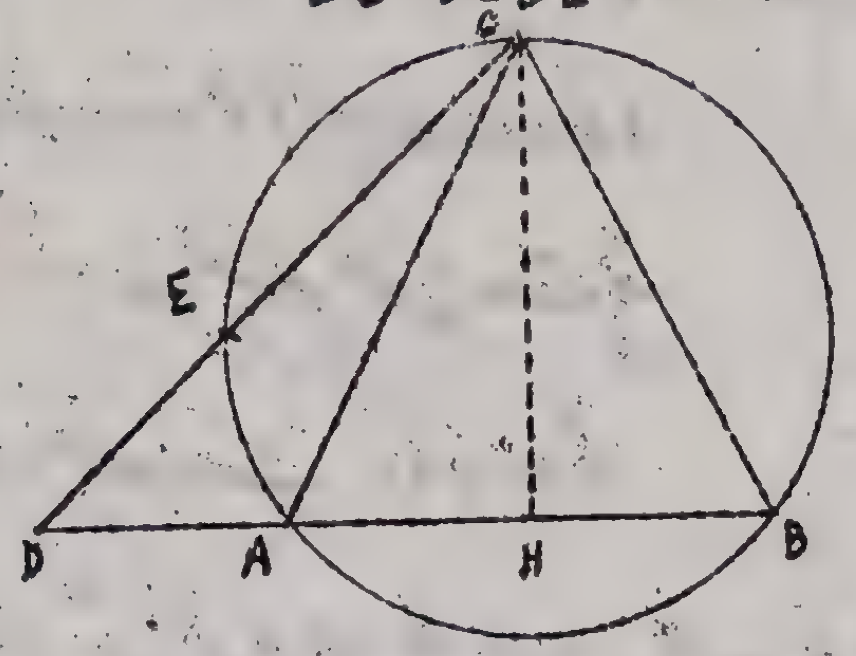
حل ـ رابطهٔ (۱) را ممکن است باینصورت نوشت

$AC^2 = CD(CD - DE) = CD^2 - CD \cdot CE$ اما ملاحظه میشود که بنا

بقوت نقطه $DC \cdot DE = DA \cdot DB$ و $DC^2 = CH^2 + DH^2$ اما چون

$DH = DA + AH$ پس $DH^2 = DA^2 + AH^2 + 2DA \cdot AH$

بنابراین $DC^2 - DC \cdot DE = CH^2 + DA^2 + AH^2 + 2DA \cdot AH - DA \cdot DB$



اما میتوان بجای $AH^2 + HC^2$

مقدار AC^2 را قرار داد پس

$DC^2 - DC \cdot DE = AC^2 + DA^2 +$

$+ 2DA \cdot AH - DA \cdot DB$

اما ملاحظه میشود که چون مثلث ABC متساوی الساقین است پس

$2AH = AB$ و $AB = DB - DA$ پس

$DC^2 - DC \cdot DE = AC^2 + DA^2 + DA(DB - DA) - DA \cdot DB$

یا $DC(DC - DE) = AC^2 + DA^2 + DA \cdot DB - DA^2 - DA \cdot DB$

که پس از اختصار میشود $DC \cdot EC = AC^2$

مسئله ـ مستطیل ABCD مفروض است از رأس A به نقطه E واقعه بر

$\frac{1}{4} BC$ وصل می‌کنیم این خط قطر BD را در نقطه O قطع می‌کند ثابت کنید

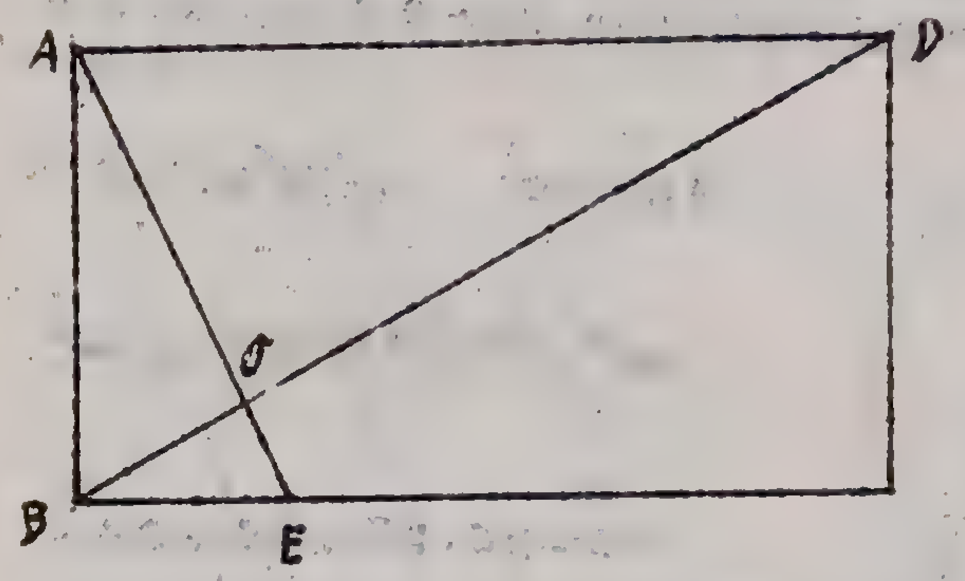
که زاویه AOD یک قائمه است در صورتیکه قاعده BC دو برابر ارتفاع

DC میباشد

حل ـ دو مثلث AOD و BOE متشابهند پس $\frac{AD}{BE} = \frac{AO}{OE} = \frac{OD}{OB}$

یعنی $\frac{AO}{OE} = 4$ و از آنجا $AO = 4OE$ و همچنین $OD = 4OB$ ولی اگر زاویه

AOD قائمه باشد چون زاویه A نیز قائمه است پس AO ارتفاع وارد از رأس زاویهٔ قائمه بر وتر

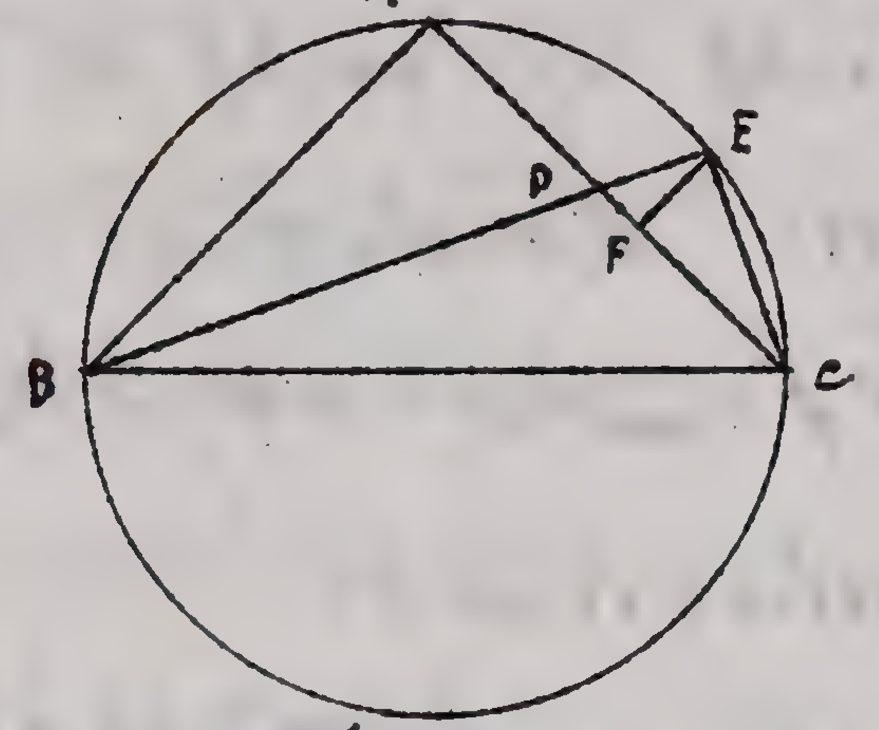


BD میباشد لذا باید $AO^2 = OB \times OD$ را ثابت کنیم محقق است چه در اینصورت $\widehat{AOD} = 90°$ میباشد اما چون $OD = 4OB$ پس باید ثابت کرد $AO^2 = 4OB^2$ ویا $AO = 2OB$ وچون $OA = 4OE$ است پس $4OE = 2OB$ و از آنجا $OB = 2OE$ میشود یعنی اگر ثابت کنیم $OB = 2OE$ است حکم ثابت است برای اینکار گوئیم $DB^2 = BC^2 + DC^2$ ویا $DB^2 = 16BE^2 + 4BE^2$ زیرا $BC = 4BE$ بنا بفرض و $DC = \frac{BC}{2} = 2BE$ بنا فرض پس $DB^2 = 20BE^2$ و از آنجا $DB = 2BE\sqrt{5}$ وچون $OD = 4OB$ پس $OB = \frac{BD}{5}$ لذا $OB = \frac{2BE\sqrt{5}}{5}$ (۱) اما در مثلث قائم الزاویهٔ ABE داریم $AE^2 = AB^2 + BE^2$ یعنی $AE^2 = 4BE^2 + BE^2$ پس $AE = BE\sqrt{5}$ وچون OE برابر $\frac{AE}{5}$ است پس $OE = \frac{BE\sqrt{5}}{5}$ (۲)

از مقایسه رابطه (۱) و (۲) معلوم میشود که $OB = 2OE$ است وچون این قسمت ثابت شد پس محقق است که زاویه AOD مساوی یک قائمه است

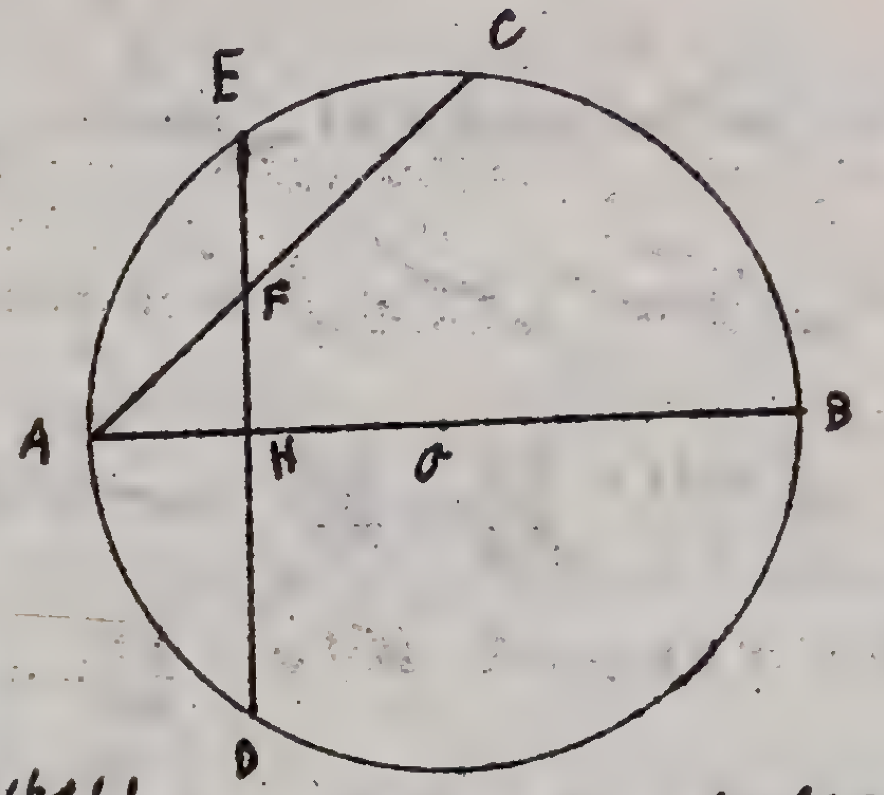
مسئله ـ مثلث متساوی الساقین ABC که در زاویه A قائمه است مفروض میباشد از رأس B میانه BD را رسم میکنیم که AC را در نقطه D و دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطه E قطع مینماید از نقطه E عمودی بر AC مانند EF فرود میآوریم ثابت کنید که $AF = 3EF$

حل ـ دو مثلث EDF و DAB متشابهند زیرا در زوایای F و A قائمه بوده و در زاویه D متقابل برأس هستند پس در زاویه سوم نیز مساوی میشوند لذا میتوان نوشت $\frac{EF}{AB} = \frac{DF}{AD}$ واما چون $AB = AC$ و $AD = \frac{AC}{2}$ است پس $\frac{EF}{AC} = \frac{DF}{\frac{AC}{2}}$ واز آنجا $2DF = EF$ واما ملاحظه میشود که دو مثلث EFC و ADB نیز متشابهند زیرا در زوایای F و A قائمه بوده و در زاویه ECA و EBA متساویند زیرا در قوس متقابل مشترک اند پس در زاویه سوم نیز متساوی بوده لذا تناسب اضلاع لازم میآید $\frac{AB}{FC} = \frac{AD}{EF}$ ویا $\frac{FC}{EF} = \frac{AB}{AD} = 2$ پس



$FC = 2EF$ ویا میتوان نوشت $\frac{FC}{2} = EF$ واز آنجا $\frac{FC}{2} = 2DF$ پس $FC = 4DF$ ولی $AF = AD + DF$ ویا $AF = DC + DF$ ویا $AF = DF + FC + DF$ واز آنجا $AF = DF + 4DF + DF = 6DF$ پس $AF = 6DF$ اما چون $2DF = EF$ پس $6DF = 3EF$ پس $AF = 3EF$

مسئله ـ دایره O بقطر AB و وتر غیر مشخص ED عمود بر آن مفروض است از نقطه A وتر غیر مشخصی چنان رسم می کنیم که DE را در F و دایره را در C قطع میکند ثابت کنید که همواره رابطه ذیل برقرار است ثابت = $AF \times AC$ (۱)



راه حل یکم ـ بنا بخاصیت اوتار متقاطع میتوان داشت

(۲) $AF \cdot FC = EF \cdot FD$

اما رابطه (۱) را میتوان بدینصورت نوشت $AF \times AC = AF(AF + FC) = AF^2 + AF \cdot FC$ اما مطابق رابطه (۲) $AF \cdot FC = EF \cdot FD$ لذا (۳) $AF \cdot AC = AF^2 + EF \cdot FD$ ولی از مثلث قائم الزاویه AHF میتوان داشت $AF^2 = AH^2 + FH^2$ و چون $FH = HE - EF$ یعنی $FH = \frac{ED}{2} - EF$ زیرا $EH = \frac{ED}{2}$ است چه قطر وتر را نصف میکند پس $AF^2 = AH^2 + (\frac{ED}{2} - EF)^2$ یعنی $AF^2 = AH^2 + \frac{ED^2}{4} + EF^2 - ED \cdot EF$

پس اگر در رابطه (۳) این قسمت را ملحوظ کنیم چنین میشود

(۴) $AF \cdot AC = AH^2 + \frac{DE^2}{4} + EF^2 - ED \cdot EF + EF \cdot FD$

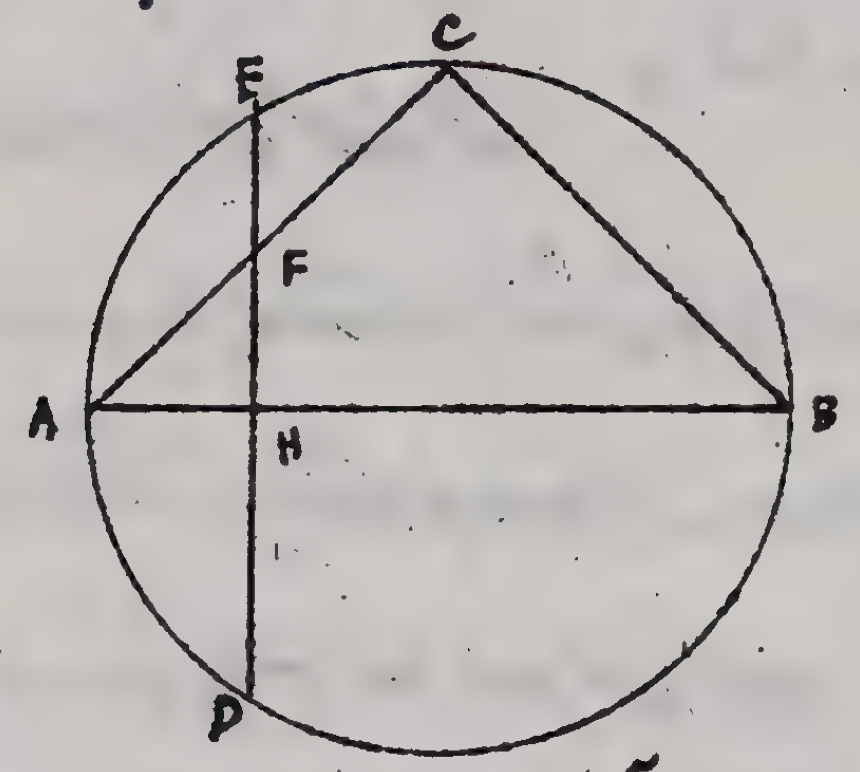
ولی از طرفی میتوان نوشت $AH \cdot HB = EH \cdot HD$ یعنی $AH \cdot HB = \frac{DE}{2} \times \frac{DE}{2} = \frac{DE^2}{4}$ و همچنین مقدار $EF^2 - EDEF = -EF(ED - EF)$ مساوی خواهد بود با $-EF \cdot FD$ پس رابطه (۴) باینصورت است

$AF \cdot AC = AH^2 + AH \cdot HB = AH(AH + HB)$

و بالنتیجه

ثابت = $AF \cdot AC = AH \cdot AB$

راه حل دوم ـ اینطریق که بسیار ساده و سهل است عبارت از اینست که از نقطه C به B وصل نموده گوئیم دو مثلث AHF و ACB متشابهند

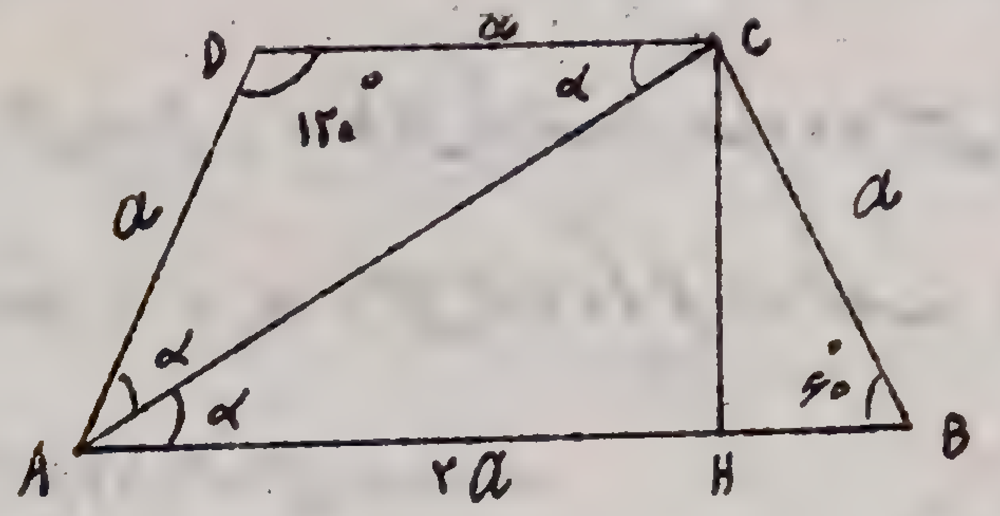


زیرا هر دو دارای دو زاویه قائمه $\hat{H}$ و $\hat{C}$ میباشند و در زاویه $\hat{A}$ مشترکند پس دو زاویه سوم نیز مساوی بوده و لذا میتوان نسبت اضلاع نوشت $\frac{AF}{AB} = \frac{AH}{AC}$ و از آنجا $AF \cdot AC = AH \cdot AB$

مسئله ـ در ذوزنقه ABCD متساوی الساقین قاعده کوچک برابر a و قاعده بزرگ مساوی $2a$ و قطر AC عمود بر ساق BC میباشد مطلوبست اولاً محاسبه CB و ثانیاً زوایای این ذوزنقه و ثالثاً مساحت آن

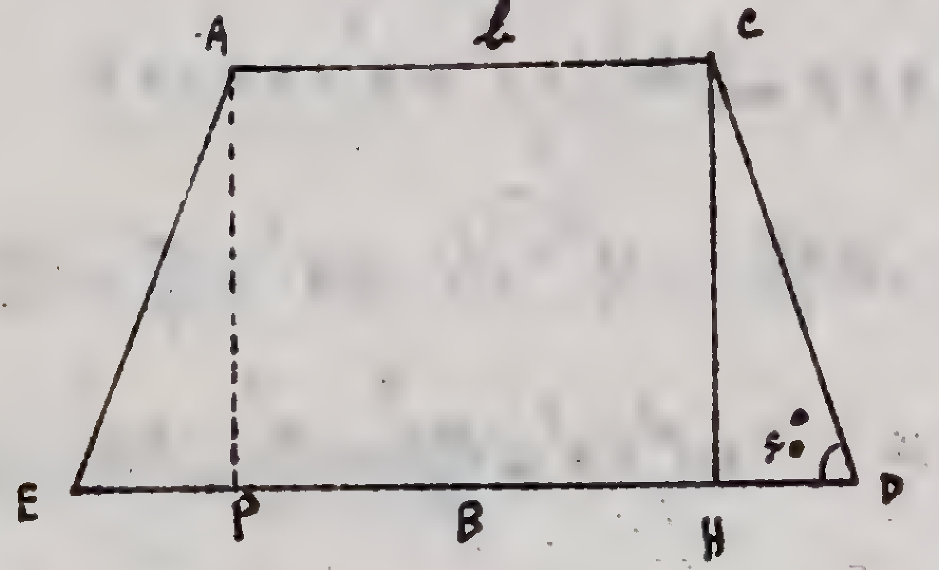
حل ـ برای محاسبه CB باید اولاً ارتفاع CH را محاسبه کرد بدینطریق $CH^2 = AH \cdot HB$ زیرا مثلث ACB قائم الزاویه میباشد پس $CH^2 = \frac{a}{2} \times \frac{3a}{2}$ و از آنجا $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و اما $CB^2 = CH^2 + HB^2$ پس $CB^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2}{4}$ پس $CB = a$ حال برای محاسبه زوایا گوئیم چون مثلث DAC متساوی الساقین است زیرا $a = DC$ بفرض

و $DA=a$ پیدا شد پس زاویه $\hat{DAC}=\hat{DCA}$ و از طرفی $\hat{DCA}=\hat{CAB}$
پس $\hat{CAB}=\hat{DAC}$ میشود یعنی
خط AC منصف الزاویه زاویه
A میباشد و چون ذوذنقه
متساوی الساقین است پس



$\hat{A}=2\alpha=\hat{B}$ میباشد لذا از مثلث قائم الزاویه ACB میتوان نوشت
$\hat{\alpha}+\hat{B}=90^\circ$ و یا $\alpha+2\alpha=90^\circ$ پس $\alpha=30^\circ$ پس $\hat{A}=\hat{B}=60^\circ$ و $\hat{D}=\hat{C}=120^\circ$
خواهد بود ثالثاً محاسبه مساحت چنین است $S=\frac{(AB+DC)CH}{2}$
و یا $S=\frac{(2a+a)a\sqrt{3}}{2\times 2}$ پس $S=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$

مسئله- ذوذنقه متساوی الساقین ACDE که در آن قاعده کوچک $AC=b$
و قاعده بزرگ $DE=B$ و زاویه $D=60^\circ$ میباشد مفروض است مطلوبست
اولاً محاسبه ضلع CD و ارتفاع CH و ثانیاً محاسبه سطح ذوذنقه و ثالثاً اگر
$B=2b$ باشد دستور مساحت چه خواهد بود و از طریق دیگر این مساحت
را حساب کنید

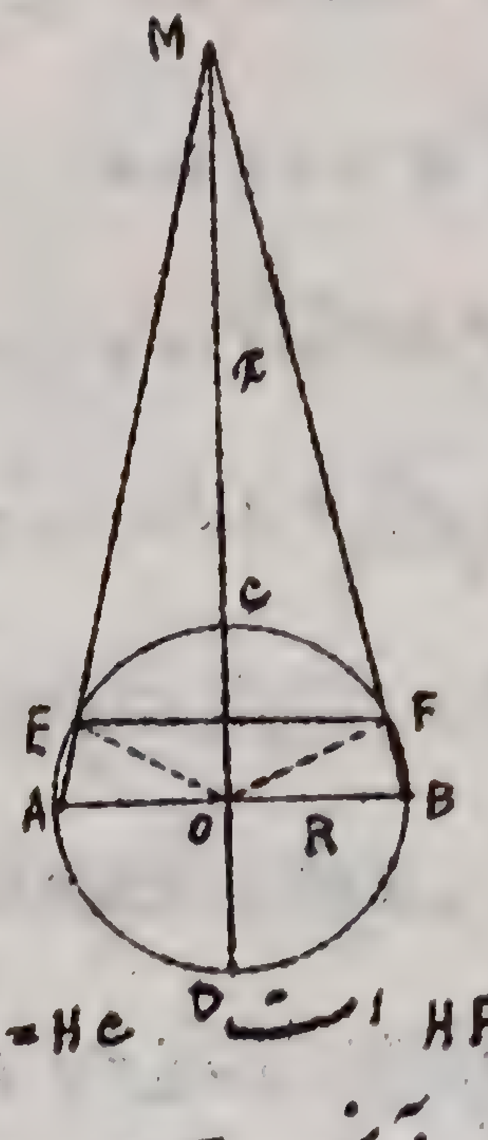


حل- برای محاسبه CD گوئیم
یک زاویه برابر ۹۰ درجه است
پس زاویه حاده دیگر مساوی ۳۰ درجه است و بنابراین ضلع مقابل بزاویه ۳۰ درجه

نصف وتر است یعنی $HD=\frac{CD}{2}$ (۱) و اما از طرفی چون ذوذنقه متساوی الساقین
است پس $EP=HD$ و $ED-AC=2HD$ یعنی $B-b=2HD$ و
از آنجا $CD=B-b$ چنانچه $B=2b$ فرض شود $CD=2b-b$ یعنی
$CD=b$ خواهد بود مانند مسئله قبل ولی برای محاسبه CH چنین مینویسیم
$CD^2=CH^2+HD^2$ پس $(B-b)^2=CH^2+\frac{(B-b)^2}{4}$ و از آنجا $CH^2=(B-b)^2-\frac{(B-b)^2}{4}$
یعنی $CH^2=\frac{3(B-b)^2}{4}$ و $CH=\frac{(B-b)\sqrt{3}}{2}$ ثانیاً محاسبه سطح ذوذنقه
میشود $S=\frac{B+b}{2}\times\frac{(B-b)\sqrt{3}}{2}$ یعنی $S=\frac{(B^2-b^2)\sqrt{3}}{4}$ ثالثاً اگر
$B=2b$ فرض شود $S=\frac{(4b^2-b^2)\sqrt{3}}{4}$ و یا $S=\frac{3b^2\sqrt{3}}{4}$
حال برای محاسبه S از طریق دیگر گوئیم CHD دو برابر سطح مثلث +
APHC + سطح مربع مستطیل = S پس $S=\frac{b\times b\sqrt{3}}{2}+2\frac{b}{2}\times\frac{b\sqrt{3}}{4}$
و از آنجا $S=\frac{b^2\sqrt{3}}{2}+\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2b^2\sqrt{3}+b^2\sqrt{3}}{4}$ پس
$S=\frac{3b^2\sqrt{3}}{4}$ ملاحظه میشود که همان دستور اولی است

مسئله- دایره O بشعاع R مفروض است دو قطر عمود بر هم AB و
CD را رسم میکنیم و از نقطه H وسط OC خط EF را بموازات AB
رسم میکنیم مطلوبست اولاً محاسبه مساحت ذوذنقه ABEF ثانیاً
مساحت مثلث EFM (نقطه M محل تلاقی امتداد دو ساق ذوذنقه است)
حل- اولاً ثابت میکنیم که این ذوذنقه متساوی الساقین است زیرا

مطابق شکل زیر مثلث OEF متساوی الساقین است و دو مثلث OHF و OHE متساوی‌اند پس زاویه $\hat{HOF} = \hat{HOE}$ و بنابراین $\hat{FOB} = \hat{EOA}$ میشود لذا دو وتر مقابل بدو زاویه مساوی متساوی خواهند بود



برای محاسبه مساحت ذوزنقه باید ارتفاع آنرا و قاعده EF را بحسب R محاسبه نمود و بنا بخاصیت اوتار متقاطع در دایره میتوان نوشت $HF \times HE = HC \times HD$ ولی چون $HF = HE$ است و $\frac{R}{2} = HC$ و $HD = \frac{3R}{2}$ پس $HF^2 = \frac{R}{2} \times \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4}$ و از آنجا $HF = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ و بنا براین $EF = R\sqrt{3}$ پس $S = \frac{(2R+R\sqrt{3})}{2} \times \frac{R}{2}$ و یا $S = \frac{R^2(2+\sqrt{3})}{4}$

ثانیاً برای محاسبه مساحت EMF (که مثلث متساوی الساقین است زیرا از امتداد دو ساق ذوزنقه متساوی الساقین بدست آمده) کافیست طول CM را محاسبه کنیم زیرا ارتفاع مثلث مساویست با MH یعنی MC+CH و $CH = \frac{R}{2}$ معلوم است پس باید MC را پیدا کرد از تشابه دو مثلث MEF و MAB میتوان نتیجه گرفت بدینصورت $\frac{EF}{AB} = \frac{x+\frac{R}{2}}{x+R}$ و یا $\frac{R\sqrt{3}}{2R} = \frac{x+\frac{R}{2}}{x+R}$ و یا پس از طرفین وسطین میشود $R\sqrt{3}x + R^2\sqrt{3} = 2Rx + R^2$ و یا $x(R\sqrt{3}-2R) = R^2 - R^2\sqrt{3}$ و از آنجا $x = \frac{R^2 - R^2\sqrt{3}}{R\sqrt{3}-2R}$ و یا $x = \frac{R^2(1-\sqrt{3})}{R(\sqrt{3}-2)}$ پس $x = \frac{R(1-\sqrt{3})}{\sqrt{3}-2}$ که ممکن

است چنین نوشت $x = \frac{R(\sqrt{3}-1)}{2-\sqrt{3}}$ و یا پس از منطق کردن $x = \frac{R(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$ و بالاخره $x = \frac{2R\sqrt{3}-2R+3R-R\sqrt{3}}{4-3}$ پس از اختصار $x = R(\sqrt{3}+1)$ و بنابراین مساحت مثلث چنین است

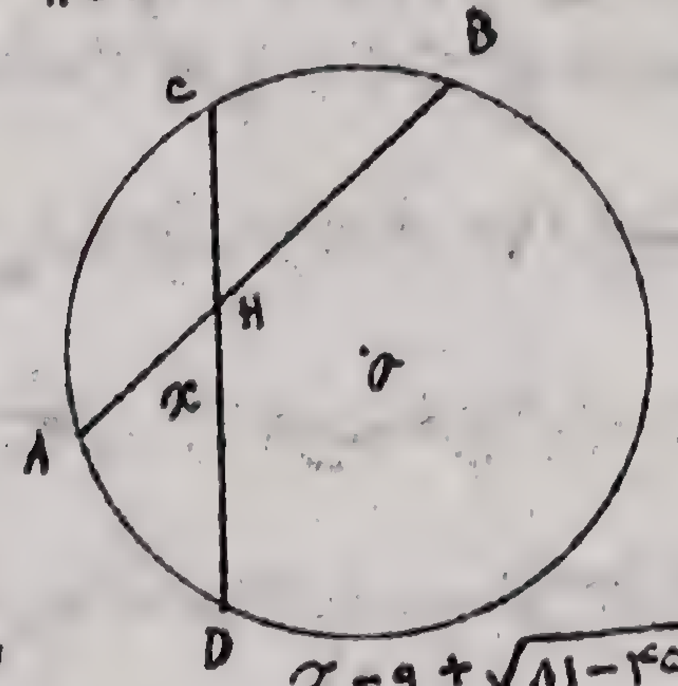
$$S = \frac{(R\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)R}{2}$$

پس از اختصار

$$S = \frac{R^2(3+\sqrt{3})}{2}$$

مسئله - دایره O مفروض است دو وتر CD و AB یکدیگر را در نقطه H قطع می‌کنند درصورتیکه طول AB = 18 متر و HC = 5 و HD = 9 متر هستند مطلوبست محاسبه طولهای دو قطعه HA و HB

حل - بنا بخاصیت اوتار متقاطع میتوان نوشت $HC \times HD = HA \times HB$ یعنی

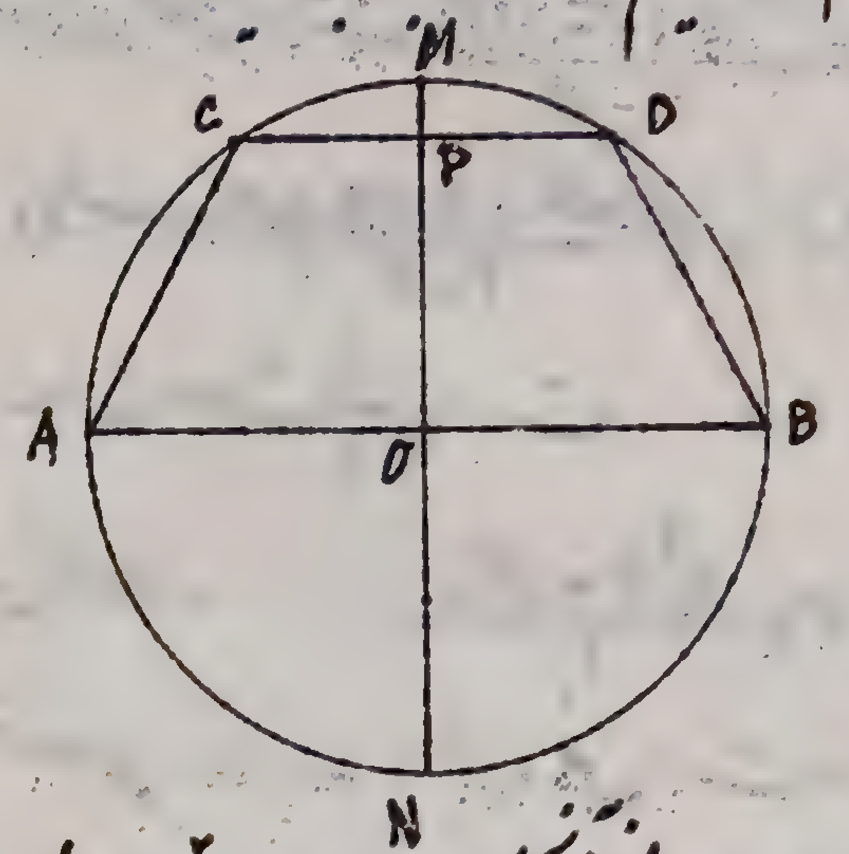


$9 \times 5 = x \times y$ و از طرفی $x + y = 18$ میباشد پس میتوان معادله درجه دومی بدینصورت تشکیل داد $x^2 - 18x + 45 = 0$ و از آنجا $x = 9 \pm \sqrt{81-45}$ پس $x = 9 \pm \sqrt{36}$ و از آنجا $x' = 9+6 = 15$ و $x'' = 9-6 = 3$

پس AH = 3 و HB = 15 متر

مسئله - دایره O بشعاع 5 متر مفروض است ولی ذوزنقه متساوی الساقین ABCD در آن محاط میباشد بطریقی که قاعده اطول آن AB قطر دایره است مطلوبست محاسبه مساحت این ذوزنقه درصورتیکه میدانیم قاعده کوچک CD = 8 متر است

حل ـ قطر MN را عمود بر AB رسم می‌کنیم آنوقت بنا بخاصیت اوتار متقاطع



گوئیم $MP \times PN = PD \times PC$
و یا اگر $MP = x$ فرض
شود چنین خواهیم داشت

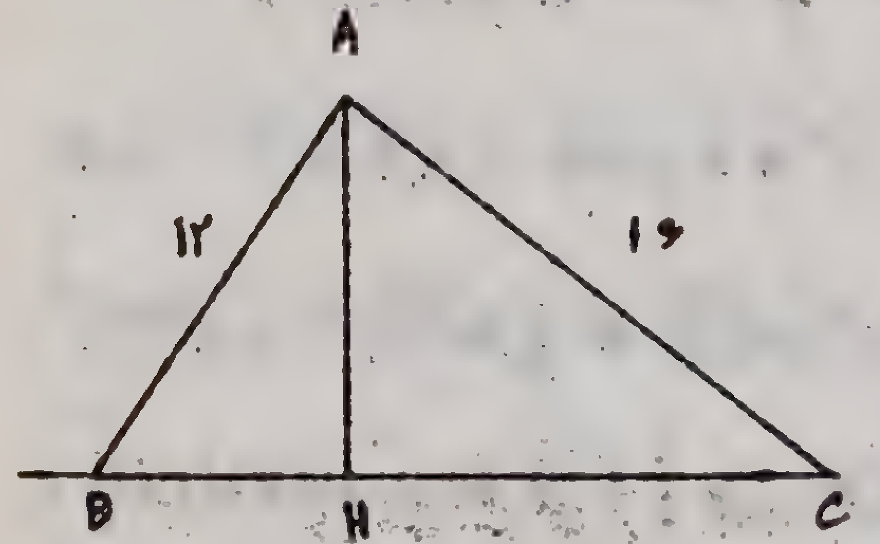
$x(10-x) = 4 \times 4$ و یا

$x(10-x) = 16$ و یا $10x - x^2 = 16$ و از آنجا $x^2 - 10x + 16 = 0$ پس

$x = 5 \pm \sqrt{25-16}$ و یا $x = 5 \pm \sqrt{9}$ و از آنجا $x' = 5 + 3 = 8$ و $x'' = 5 - 3 = 2$

البته واضح است که قیمت $MP = 2$ ، $PN = 8$ است پس وقتی $MP = 2$ شد طول ارتفاع ذوزنقه یعنی $OP = OM - MP = 5 - 2$ بنابراین $OP = 3$ متر میباشد پس مساحت ذوزنقه مساویست با $S = \left(\frac{10+8}{2}\right)3$ و از آنجا $S = 27$ متر مربع

مسئله ـ از مثلث قائم الزاویه اضلاع مجاور بزاویه قائمه $AB = 12$ متر و $AC = 16$ متر میباشند مطلوبست محاسبهٔ ارتفاع و دو قطعه که این ارتفاع وارد از رأس قائمه از وتر جدا می‌کند و ثانیاً محاسبهٔ شعاع دایره محاطیه مثلث .



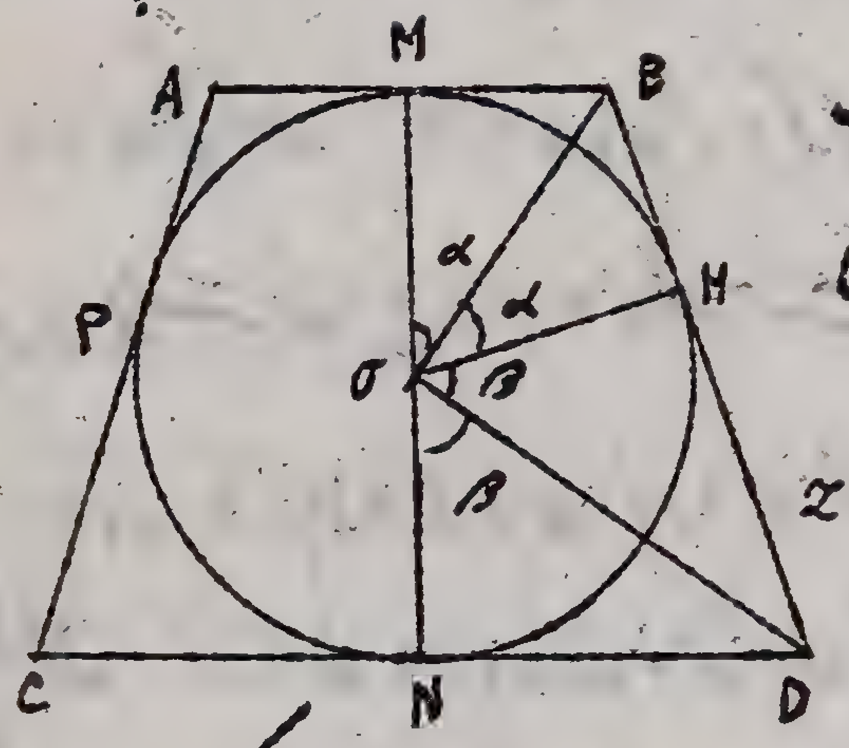
حل ـ اولاً وتر BC را حساب میکنیم
$BC^2 = 12^2 + 16^2 = 400$ پس
$BC = 20$ متر حال ارتفاع AH را
محاسبه می‌کنیم بدین ترتیب که چون دو مثلث AHB و BAC متشابه اند لذا

میتوان نوشت $\frac{AH}{16} = \frac{12}{20}$ و یا $\frac{AH}{16} = \frac{3}{5}$ پس $5AH = 48$ و از آنجا $AH = 9,6$ متر و برای محاسبه دو قطعه BH و HC هم ممکن است از تشابه مثلثات استفاده کرد و هم ممکن است چنین نوشت $AH^2 = BH \times HC$ یعنی $(9,6)^2 = x \times y$ و $x + y = 20$ پس معادله درجه دومی تشکیل میدهیم بدین شکل $x^2 - 20x + (9,6)^2 = 0$ یعنی $x^2 - 20x + 92,16 = 0$ که جوابهای این معادله x' و x'' یکی قطعه $BH = 7,2$ و دیگری قطعه $CH = 12,8$ متر خواهد بود و ثانیاً برای محاسبه شعاع دایره محاطیه مثلث گوئیم $S = pr$ اما $S = \frac{12 \times 16}{2} = 96$ و $p = \frac{12+16+20}{2} = 24$ زیرا p نصف محیط مثلث است پس $r = \frac{96}{24} = 4$

مسئله ـ ذوزنقه ABCD متساوی الساقین محیط بر دایره O بشعاع ۶ متر میباشد مطلوبست محاسبهٔ اضلاع این ذوزنقه در صورتیکه میدانیم محیط ذوزنقه برابر ۵۲ متر باشد

حل ـ اگر قطر MON عمود بر قاعدتین را رسم کنیم دو قاعده را نصف میکند زیرا ذوزنقه متساوی الساقین است و چون $BM = BH$ و $MA = AP$ و $DN = HD$ و $CN = CP$ میباشد پس اگر نصف قاعده کوچک را برابر x و نصف قاعده بزرگ را مساوی y فرض کنیم (۱) $4x + 4y = 52$ میباشد اما مثلث BOD قائم الزاویه است چه مثلث MOB مساوی مثلث BOH میباشد پس $\hat{MOB} = \hat{BOH}$ و همچنین از تساوی دو مثلث HOD و DON

نتیجه میشود که $\hat{HOD} = \hat{DON}$ (مثلث ها در ۳ ضلع مساویند) و چون زوایای یک طرف خط مساوی ۱۸۰ درجه است پس $2\alpha+2\beta = 180^\circ$ و از آنجا $\alpha+\beta = 90^\circ$ یعنی زاویه BOD قائمه است و چون OH عمود بر BD میباشد پس عمود وارد از رأس زاویه قائمه بوده لذا میتوان نوشت $OH^2 = HB \times HD$ یعنی $R^2 = 36 = xy$ و داریم $x+y = 13$ زیرا از (۱) بدست میآید پس معادله درجه دومی تشکیل میدهیم باین صورت



$x^2 - 13x + 36 = 0$ و از آنجا

$x = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2}$ پس $x = \frac{13 \pm 5}{2}$

و از آنجا $x' = \frac{13+5}{2} = 9$ و $x'' = \frac{13-5}{2} = 4$ پس قاعده کوچک $AB = 8$ و قاعده بزرگ $CD = 18$ و ساق $AC = BD = 13$ متر میباشند

«حل مسائل زیر بعهده دانش آموزان است»

مسئله - یک مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = AC)$ محاط در دایره مفروض است منصف الزوایای BD و CF از زوایای قاعده یکدیگر را در نقطه I قطع میکنند و دایره را در نقاط D و F قطع مینمایند ثابت کنید اولاً شکل AFID متوازی الاضلاع است ثانیاً مطلوبست محاسبه تفاضل زاویه A از متوازی الاضلاع و زاویه A از مثلث

مسئله - اگر AB و DE دو قطر متعامد و AC یک وتر مقابل به قوس $AC = 60$ درجه باشد نقطه C را به D و E وصل میکنیم ثابت کنید اولاً CE و CD منصف الزوایای زوایای خارجی و داخلی مثلث ACB بر رأس C میباشند ثانیاً تصویر A را بر روی وتر CD و همچنین B و F و H را نیز بر روی این وتر پیدا میکنند ثابت کنید که دو مثلث AFC و CHB متساوی الساقین میباشند ثالثاً اگر N نقطه تقاطع BH با دایره مفروض باشد ثابت کنید که DN موازی است با CB

مسئله - دایره O نقطه AB مفروض است از نقطه A وتر غیر مشخص AC را رسم میکنیم بعد مماس در نقطه C و مماس دیگری در نقطه B رسم نموده اگر نقطه D محل تقاطع این دو مماس باشد ثابت کنید اولاً OD موازی AC است ثانیاً شکل را صحیحاً در صورتیکه $R = 40$ میلیمتر و قوس BC مساوی ۱۳۵ درجه است بسازید

مسئله - دایره بمرکز O و شعاع R مفروض است و وتر غیر مشخص AB را رسم کرده و آنرا در خارج دایره باندازه $BC = R$ امتداد میدهیم و از نقطه C قطر DE را رسم نموده ثابت کنید اولاً زاویه AOD سه برابر زاویه ACD است ثانیاً در حالت مخصوص که $AB = R$ باشد پیدا کنید اندازه زاویه AOD را بحسب درجه

مسئله - مثلث قائم الزاویه BAC مفروض است از نقطه C عمودی بر وتر اخراج می کنیم که AB را در نقطه D تلاقی میکند مطلوبست محاسبه CD و AD در صورتیکه AB=۱۵ و AC=۲۰ سانتی متر باشد

مسئله - مثلث ABC قائم الزاویه در زاویه A که اضلاع مجاور بزاویه قائمه آن AB =۲۴ میلیمتر و AC=۱۸ میلیمتر میباشند مفروض است از نقطه M وسط وتر عمودی بر وتر اخراج می کنیم که AC را در D و AB را در E قطع میکند مطلوبست اولاً محاسبه MC و ثانیاً ثابت کنید که مثلث DMC متشابه است با مثلث ABC و ثالثاً محاسبه BE و رابعاً ثابت کنید که چهار نقطه E و C و A و M در روی محیط یک دایره واقع اند و شعاع این دایره را حساب کنید

مسئله - مثلث ABC که ارتفاعش BH مساوی قاعده BC است و نقطه H موقع عمود AH قاعده را بطریقی قسمت میکند $AH = \frac{2h}{3}$ و $HC = \frac{h}{3}$ مطلوبست اولاً محاسبه اضلاع AB و BC و ثانیاً محاسبه فواصل NH و HM از H تا اضلاع AB و BC

مسئله - در ذوزنقه ABCD ثابت کنید محل تقاطع اقطار به نسبت دو قاعده اقطار را قطع میکند ثانیاً اگر از نقطه O محل تلاقی اقطار خط FOE را بموازات قاعدتین رسم کنیم دو طول FO و OE مساویند ثالثاً اگر قاعده کوچک را a و قاعده بزرگ را b فرض کنیم مطلوبست محاسبه FE

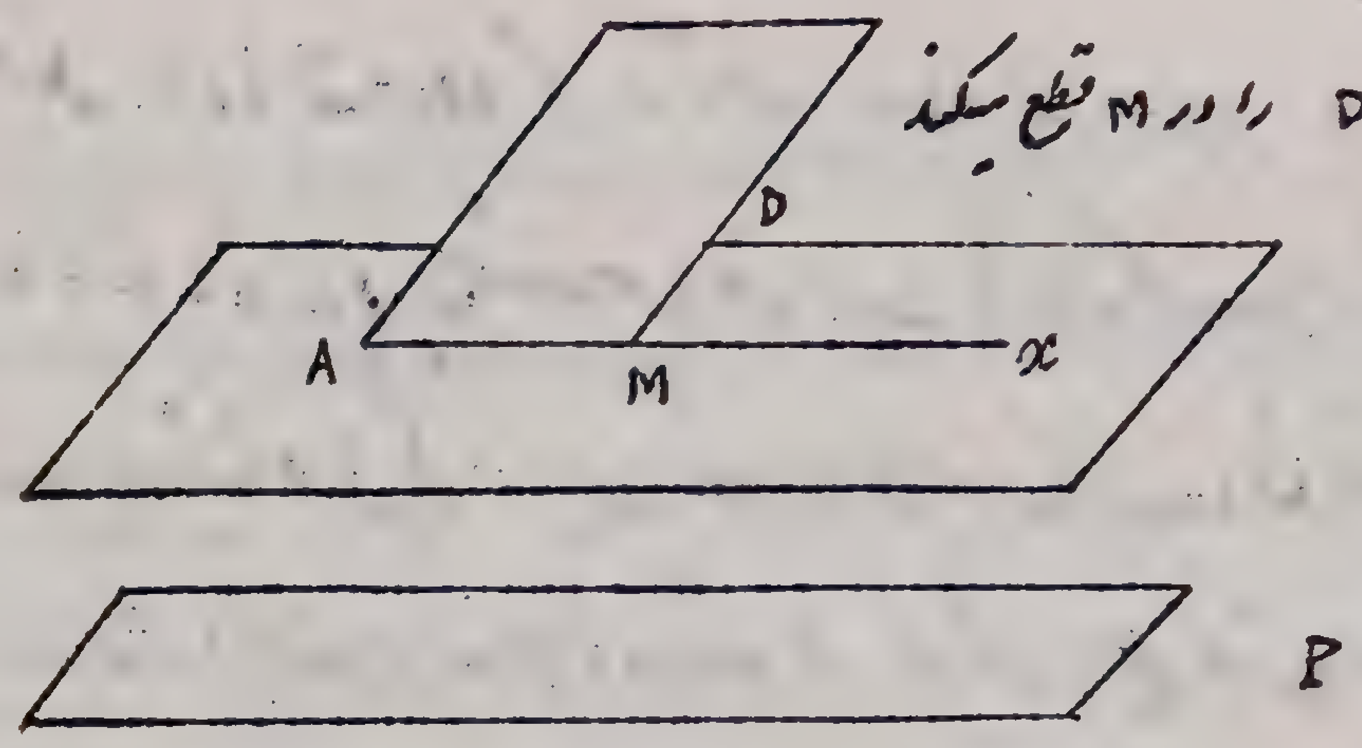
مسئله - ذوزنقه ABCD که در آن AB=۱ متر CD=۳ متر و $\hat{C} = \hat{D} = ۶۰$ درجه میباشند مفروض است ثابت کنید اولاً دو قطر این ذوزنقه مساویند ثانیاً طول یکی از این اقطار را محاسبه کنید ثالثاً اضلاع غیر موازی ذوزنقه را امتداد میدهیم تا در نقطه S یکدیگر را قطع کنند مطلوبست محاسبه طولهای SA و SB و SD و SC

مسئله - دایره O مماس بر خط xy در نقطه R مفروض است از نقطه P واقع در روی xy قاطع PAB را بر دایره رسم می کنیم مطلوبست اثبات رابطه $PR^2 = PA \times PB$

مسئله - مثلث ABC محاط در دایره بمرکز O میباشد منصف الزاویه زاویه BAC را رسم می کنیم این خط ضلع BC را در نقطه D و دایره را در نقطه M قطع میکند ثابت کنید اولاً که نقطه M وسط قوس BMC است و ثانیاً MC را رسم می کنیم ثابت کنید در روی شکل مثلث های متشابهی موجود است که از آنها نتیجه شود $MC^2 = MD \times MA$

مسئله - از نقطه مفروضه A خطی مرور دهید که خط D را قطع کند و با صفحه مفروض P موازی باشد

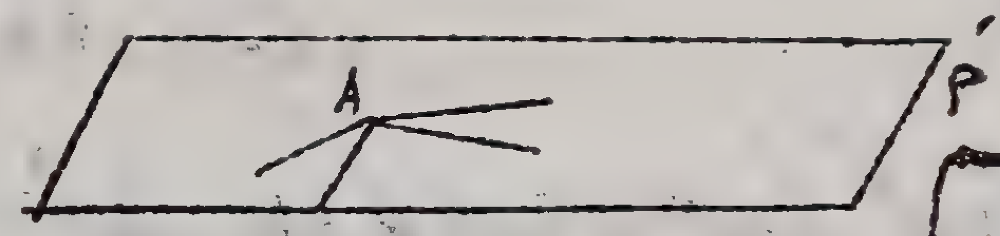
حل - بر نقطه A و خط D صفحه مرور میدهیم و از نقطه A نیز صفحه بموازات صفحه مفروض P رسم می کنیم فصل مشترک این دو صفحه خط AX مطلوب



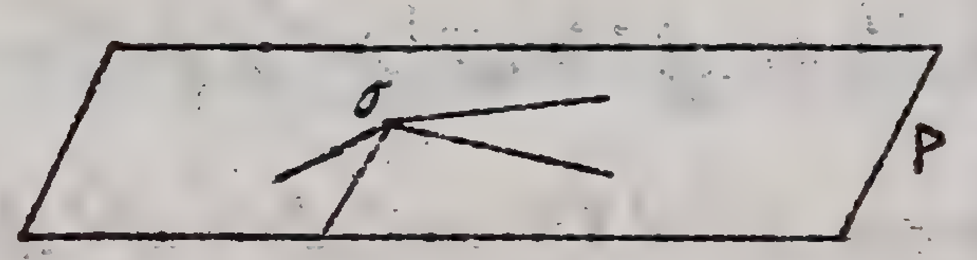
میباشد که خط D را در M قطع میکند

مسئله - خطی بموازات صفحه P از نقطه A مرور دهید

حل - چون خط با صفحه موازیست درصورتیکه با یکی از خطوط آن صفحه موازی باشد پس واضحست که از نقطه A بنهایت خط میتوان بموازات صفحه P رسم نمود زیرا در روی صفحه P



میتوان خطوط بسیاری رسم کرد و از نقطه A بموازات

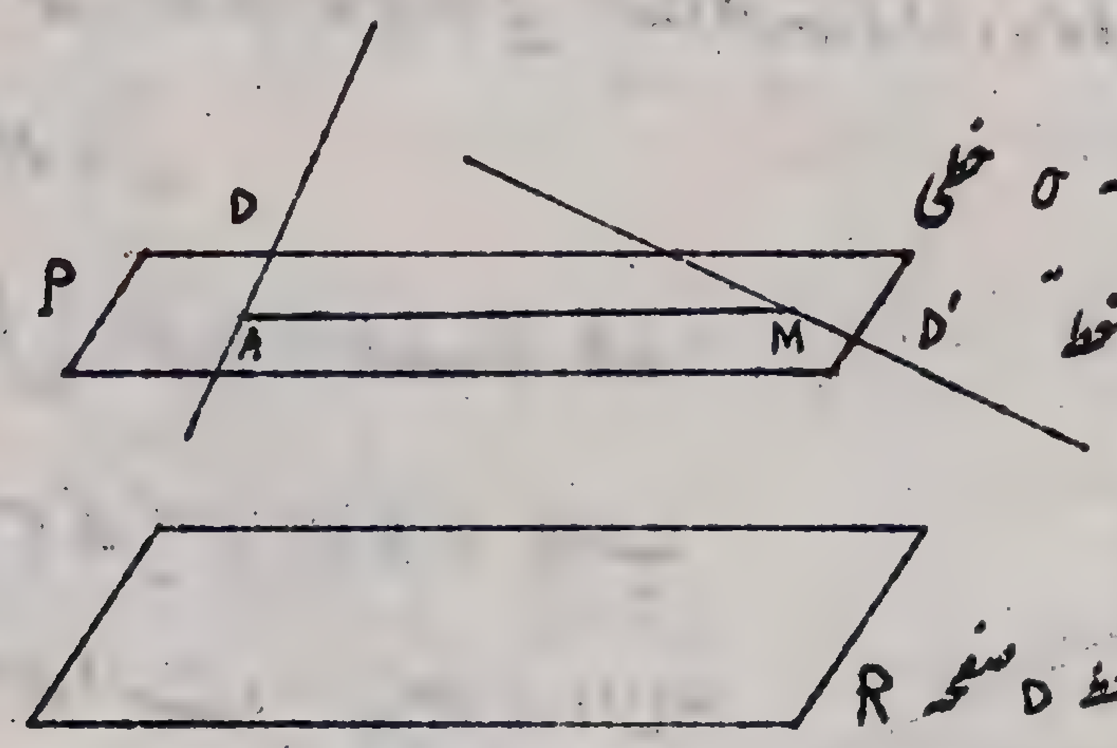


هر کدام از این خطوط رسم شود خطی موازی با صفحه میباشد و این خطوط جمعاً در صفحه ای بر نقطه A و موازی با صفحه P واقعند

مسئله - خطی بموازات صفحه R چنان مرور دهیم که بر دو خط D و D' متکی باشد

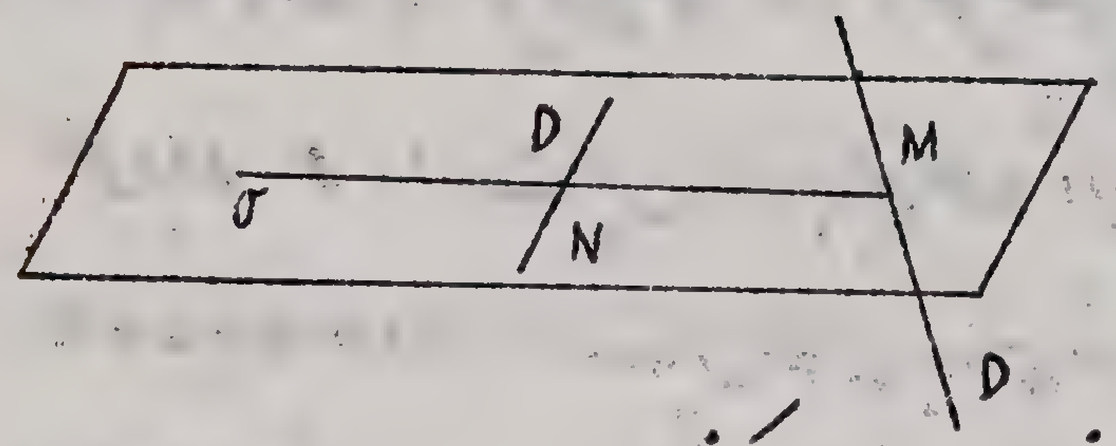
حل - بر یکی از نقاط خط D مانند A صفحه بموازات صفحه R رسم می کنیم مانند صفحه P این صفحه خط D' را در نقطه M قطع میکند پس خط AM جواب

مسئله است



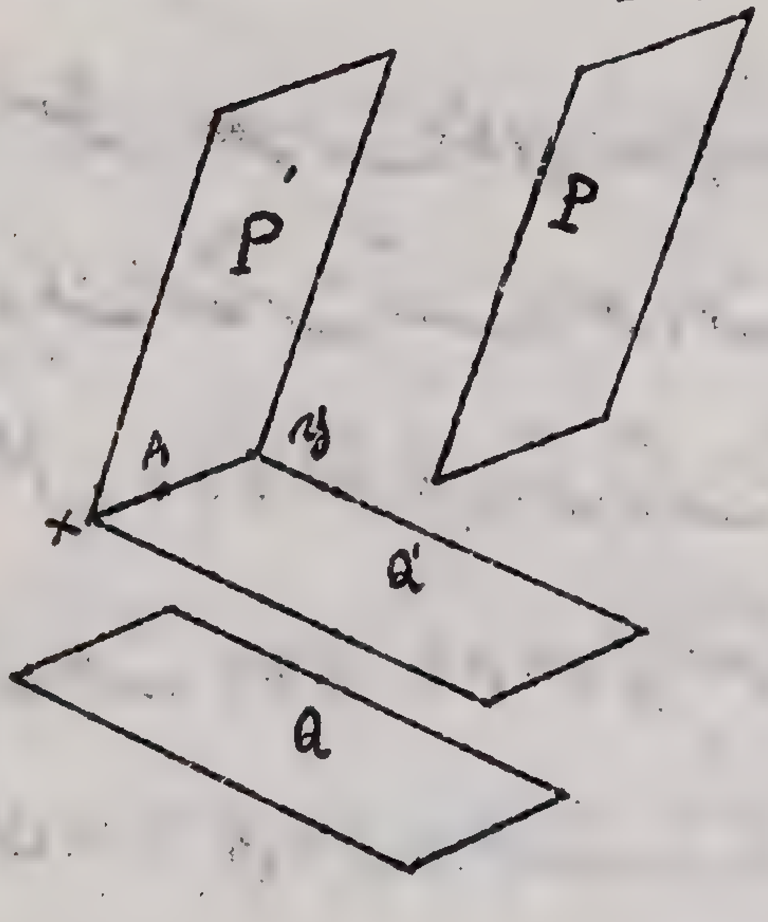
مسئله - بر نقطه مفروضه O خطی چنان مرور دهید که دو خط D و D' را قطع کند

حل - بر نقطه O و خط D صفحه R مرور میدهیم این صفحه خط D' را در نقطه M قطع میکند خط OM را وصل کرده امتداد میدهیم تا بر D که در همین صفحه است



متکی گردد پس خط OMN جواب مسئله است

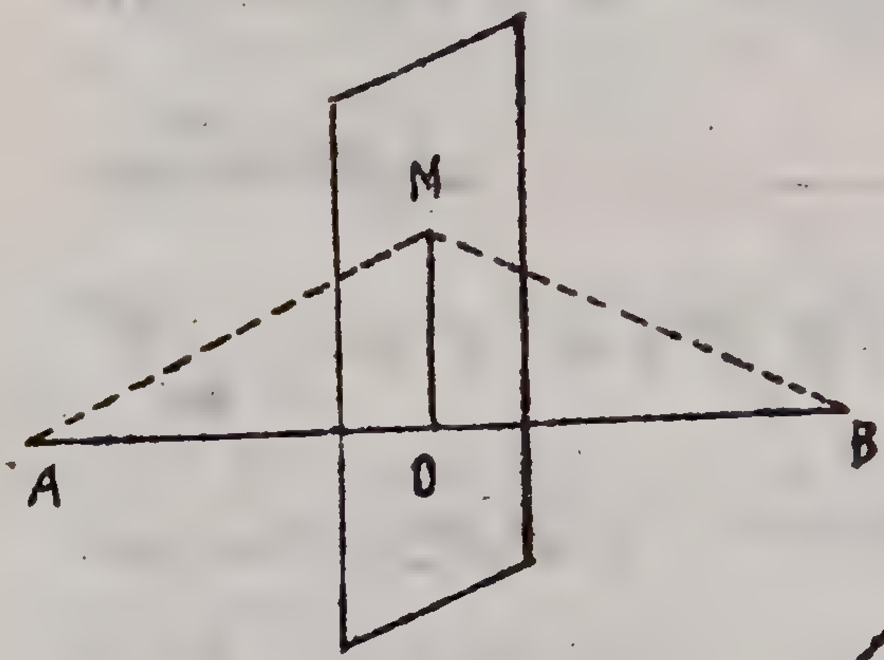
مسئله - خطی بموازات دو صفحه P و Q رسم کنید



حل - از نقطه اختیاری A دو صفحه P' و Q' را بموازات P و دیگری را بموازات Q رسم می کنیم فصل مشترک این دو صفحه xy جواب مسئله است

مسئله ـ مکان هندسی نقاطی را پیدا کنید که از دو نقطهٔ فضائی A و B بیک فاصله باشد

حل ـ صفحهٔ عمود منصف خط AB را رسم می‌کنیم این صفحهٔ P جواب مسئله است زیرا هر نقطه از آن مثلاً

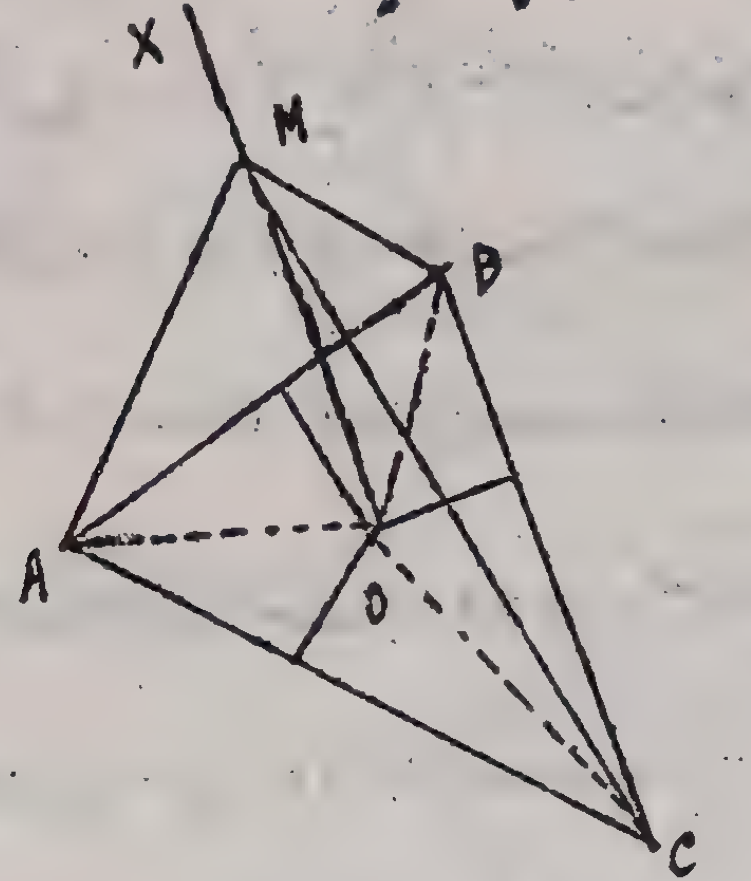


M از A و B بیک فاصله است چه اگر از M به نقطهٔ O محل تلاقی صفحه AB وصل کنیم این خط بر AB عمود است زیرا صفحه بر AB عمود است پس AB بر جمیع خطوط آن صفحه OM عمود خواهد بود و چون OM بر وسط AB عمود است پس مکان هندسی نقاطی است که A و B متساوی الفاصله میباشد

مسئله ـ مطلوبست مکان هندسی نقاطی که از ۳ نقطهٔ فضائی A و B و C غیر واقعه بر یک استقامت بیک فاصله باشند.

حل ـ بر ۳ نقطهٔ غیر واقعه بر یک استقامت A, B, C همواره یک صفحه مرور میکند پس مثلث ABC را ملاحظه می‌کنیم که نقطهٔ O محل تلاقی ۳ عمود منصف اضلاع آن دارای این خاصیت است که از ۳ رأسش بیک فاصله باشد پس یکی از نقاط نقطهٔ O است حال از نقطهٔ O خطی عمود بر صفحه ABC اخراج نموده گوئیم این خط OX مکان هندسی مطلوب میباشد چه اگر بر نقطهٔ غیر مشخص مانند M در روی این

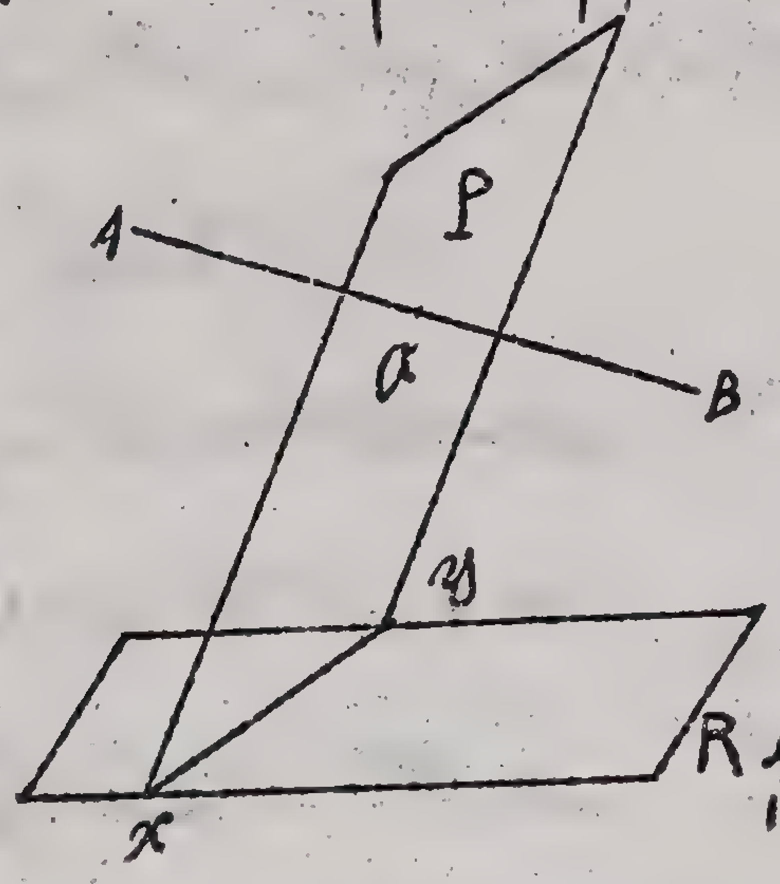
فرض کنیم از نقاط A و B و C بیک فاصله میباشد زیرا مثلث های MOA و MOB و MOC همه در یک ضلع MO مشترک و در ضلع دیگر مجاور بزاویه قائمه مساوی و در زاویه بینهما قائمه اند پس مساوی میباشند بنا بر این MA=MB=MC میشود و



چون نقطهٔ O مرکز دایره محیطی مثلث است پس خط مکان مطلوب خطی است عمود بر صفحه ABC بر نقطه مرکز دایره محیطی مثلث

مسئله ـ مطلوبست تعیین مکان هندسی نقاطی که از A و B بیک فاصله بوده و در صفحهٔ مفروض R واقع باشند

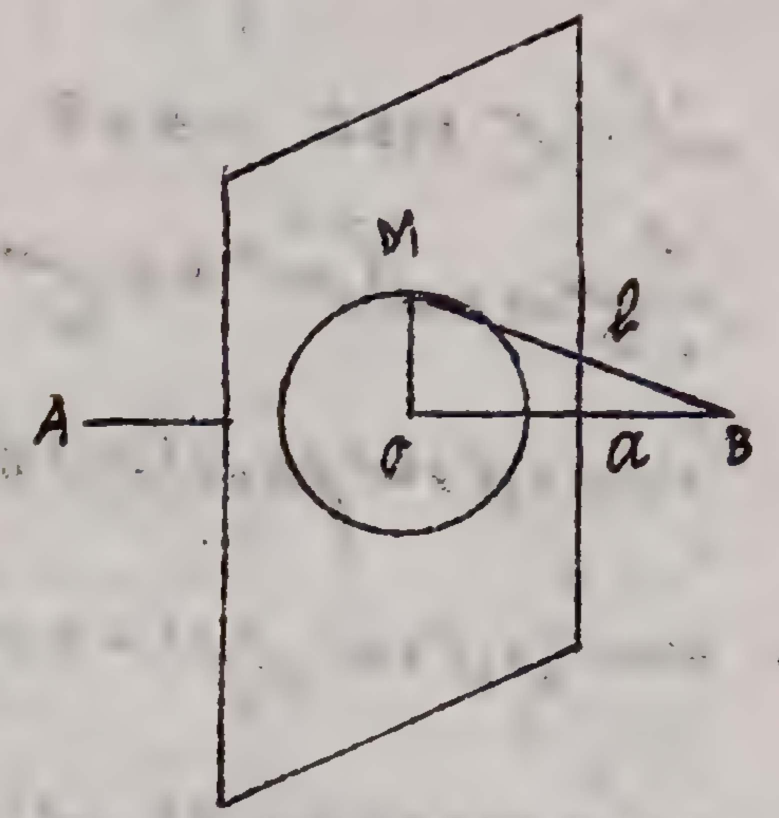
حل ـ صفحه عمود منصف AB را رسم می‌کنیم فصل مشترک این صفحه P با صفحهٔ مفروض R خط xy



جواب مسئله میباشد زیرا هم در صفحهٔ مفروض R واقعست و هم در روی P بوده بنا بر این از جمیع نقاطش از A و B بیک فاصله اند

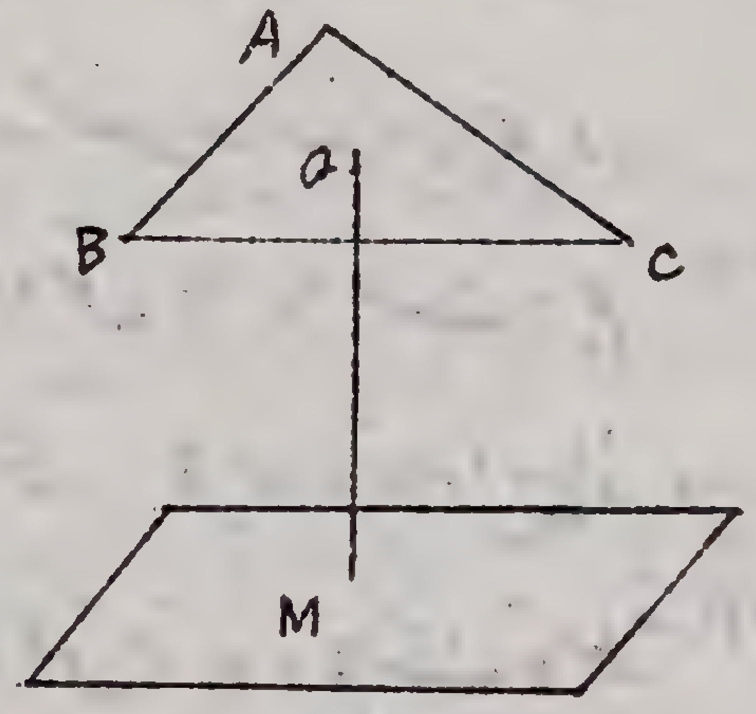
مسئله ـ مطلوبست تعیین مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ فضائی A و B

بفاصلهٔ معین l باشند



حل ـ اولاً میدانیم که مکان هندسی نقاطی که از A و B بیک فاصله اند صفحهٔ P عمود بر وسط AB میباشد حال مقصود تعیین نقاطی است که از A و B فاصلهٔ معین متساوی l را دارا باشند گوئیم اگر یکی از آن نقاط را M فرض می‌کنیم مثلث قائم‌الزاویه MOB یک ضلعش $a=OB$ معلوم و وتر $l=MB$ نیز مفروض است پس برای پیدا کردن نقطه M کافیست طول OM را پیدا کرده باین ترتیب $OM^2=l^2-a^2$ پس $OM=\sqrt{l^2-a^2}$ بنابراین نقطه O وسط خط AB را مرکز قرار داده بشعاع $\sqrt{l^2-a^2}$ دایره رسم می‌کنیم جمیع نقاط محیط این دایره از A و B بفاصلهٔ معین l هستند

مسئله ـ مطلوبست تعیین نقطه که در صفحه P واقع بوده و از ۳ نقطه A و B و C بیک فاصله باشد

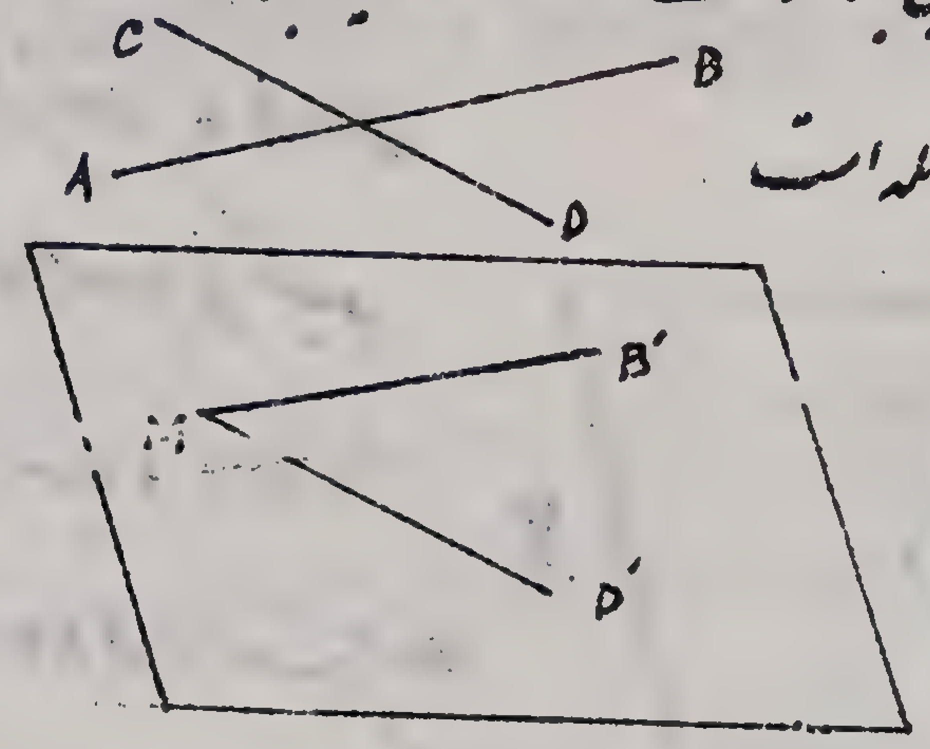


حل ـ خط OX مکان هندسی نقاط متساوی الفاصله از A و B و C خطی است عمود بر صفحه مثلث ABC بر نقطه O محل تلاقی ۳ عمود منصف اضلاع آن خط صفحه P را در نقطه

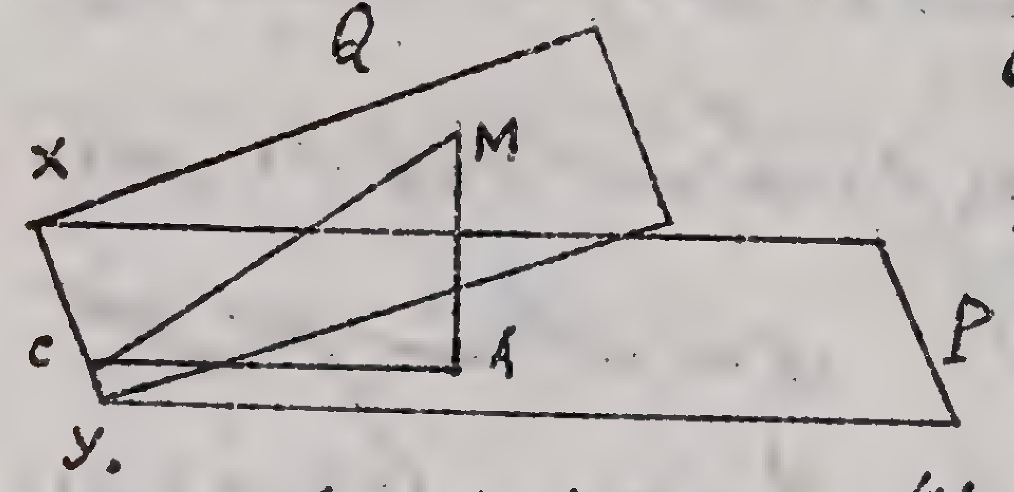
M مطلوب قطع می‌کند پس نقطه M جواب مسئله است

مسئله ـ از نقطه M صفحه بموازات دو خط متقاطع AB و CD مرور دهید

حل ـ از نقطه M دو خط یکی بموازات AB و خط دیگر بموازات CD مرور میدهیم صفحه این دو خط جواب مسئله است



مسئله ـ دو صفحه متقاطع P و Q مفروضند از یکی از نقاط صفحه P مانند M خطی بر صفحه Q عمود نموده و خطی بر فصل AB نیز عمود می‌کنیم میخواهیم ثابت کنیم صفحه این دو خط نیز بر فصل مشترک عمود است

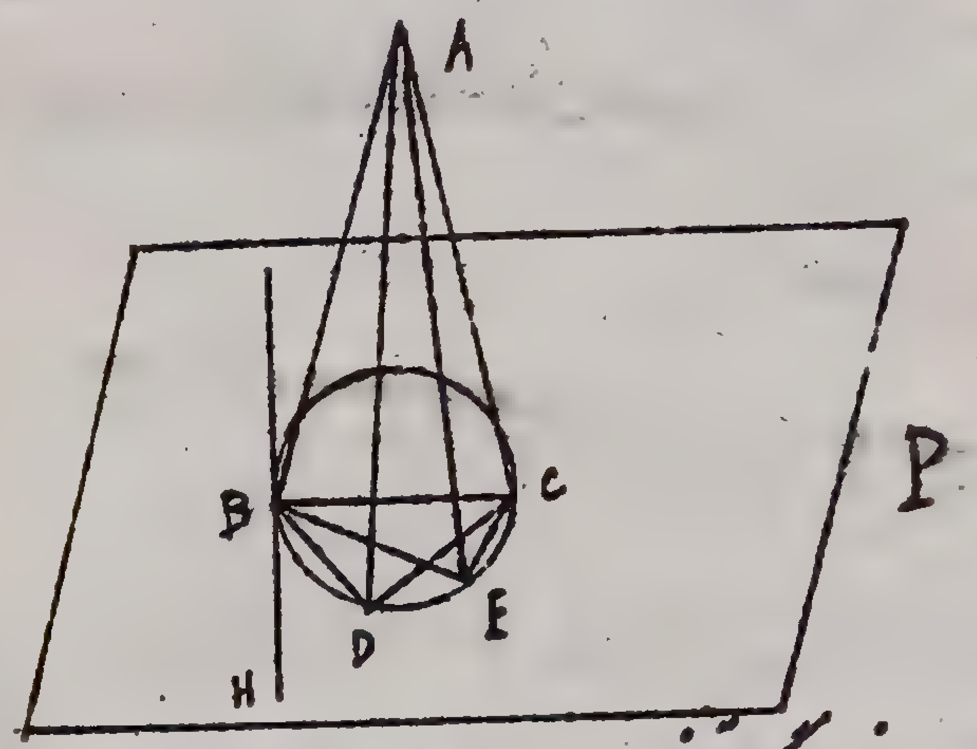


حل ـ اگر از نقطه A به C وصل کنیم این خط بر فصل مشترک xy نیز عمود است (بنا بقضیه ۳ عمود)

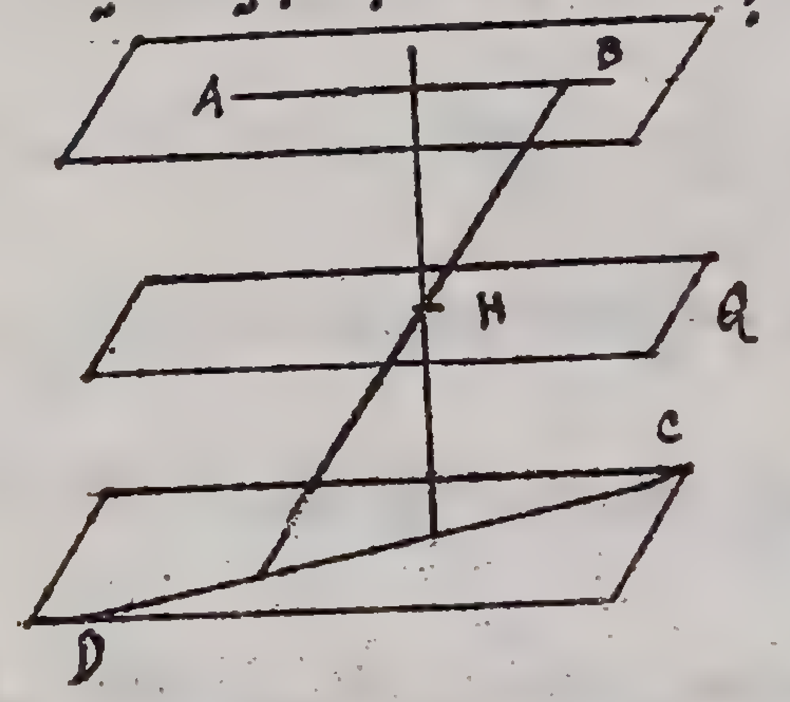
پس دو خط MC و AC بر فصل مشترک xy عمود شد لذا صفحه آن دو نیز بر فصل مشترک عمود است یعنی صفحه MAC بر xy عمود است

مسئله ـ مطلوبست مکان هندسی تصاویر نقطه M بر روی خطوطی که از نقطه B واقع در صفحه P رسم میشود

حل - از نقطه A عمودی بر صفحه P وارد می‌کنیم این عمود بر خط BC عمود است
واگر از نقطه B خط BH را عمود بر BC رسم کنیم خط AB بنا بقضیه ۳ عمود بر BH
عمود خواهد بود پس نقطه B یکی از نقاط مکان مطلوب میباشد حال خط BD را رسم
کرده واز نقطه A عمودی

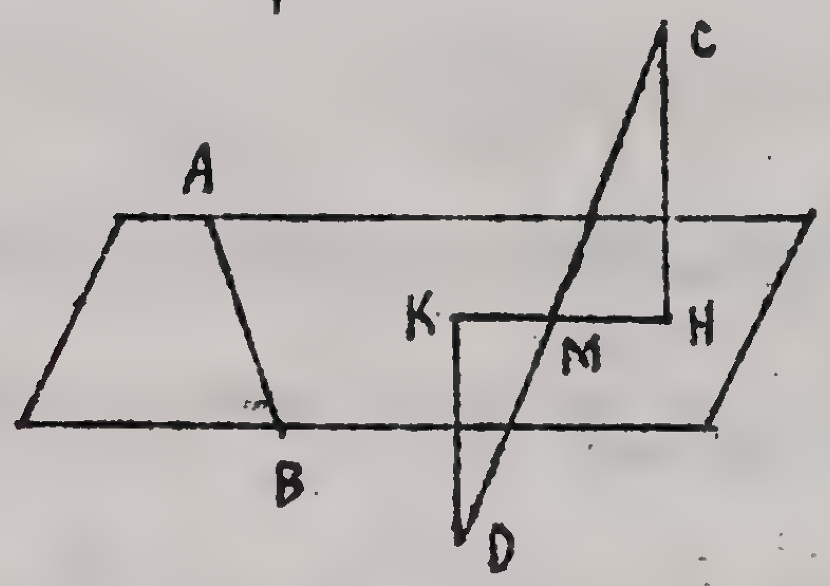


براین خط رسم می‌کنیم
نقطه D تصویر A بر BD است
اما چون AD عمود است بر BD
پس اگر از نقطه C به D وصل کنیم بنا بعکس قضیه ۳ عمود این خط بر BD عمود میباشد
همچنین اگر خط دیگری مانند BE رسم کنیم تصویر نقطه A بر روی BE نقطه E
موقع عمود AE بر BE میباشد واگر از C به E وصل کنیم این خط بر BE عمود است
پس ملاحظه میشود که اگر دایره بقطر BC رسم کنیم از نقاط D و E وغیره که
رؤس زوایای قائمه هستند میگذرد پس مکان مطلوب همین دایره است

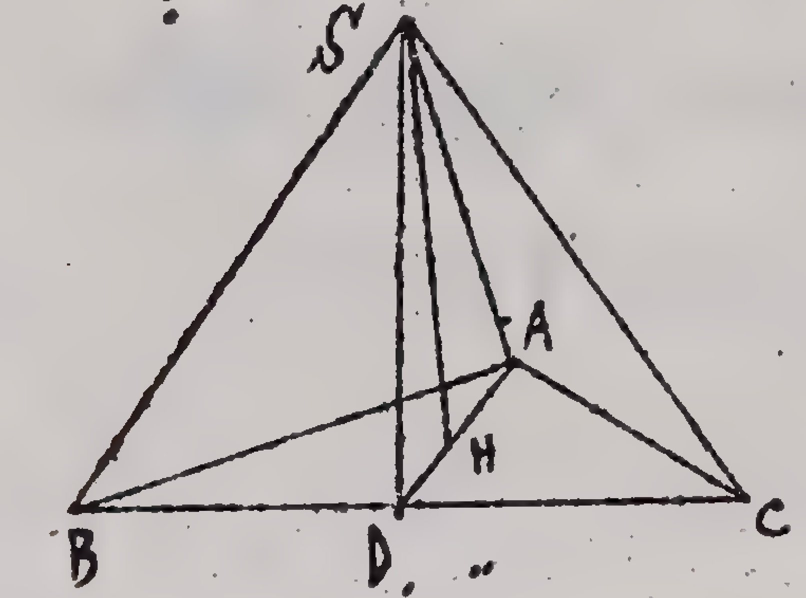


مسئله مطلوبست مکان هندسی
اوساط خطوط متکی بر دو خط فضائی
AB و CD
حل - بر خط AB صفحه بموازات
CD وبراین خط نیز صفحه بموازات AB مرور میدهیم صفحه Q که بموازات آنها.

ومتساوی الفاصله از این دو صفحه رسم شود مکان مطلوب خواهد بود زیرا این صفحه
شامل اوساط کلیه خطوطی است که متکی بر این دو صفحه موازی باشد
مسئله - بر خط AB صفحه مرور دهید که دو نقطه C و D از این صفحه فاصله مساوی
داشته باشند
حل - بر خط AB و نقطه M وسط CD صفحه مرور میدهیم این صفحه مطلوب
میباشد زیرا اگر از نقاط C و D دو عمود بر این صفحه وارد کنیم دو مثلث SHM
و DKM که قائم الزاویه میباشند



مساوی بوده و بنابراین فواصل
نقاط C و D از صفحه ABM
یعنی CH و DK مساوی میباشند
مسئله - مطلوبست حجم چهار وجهی منتظمی که خط الرأس آن a میباشد
حل - چهار وجهی منتظم قاعده و وجوه



جانبی اش مثلث های متساوی الاضلاع
میباشد و ارتفاع وارد از رأس S
بر مرکز قاعده یعنی بر H که $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع AD است واقع میشود پس حجم چهار وجهی
چنین است

$$V = \frac{1}{3}\ \text{سطح}\ ABC \times SH$$

اما

$$\text{سطح}\ ABC = a \times \frac{AB}{2}$$

ولی $AD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$ پس $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ بنابراین

سطح $ABC = a \times \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

حال باید SH را حساب نمود برای اینکار گوئیم

$SH^2 = a^2 - AH^2$

اما $AH = \frac{2}{3}AD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ پس $SH^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$

پس $SH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ بنابراین $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

و یا بالاخره $V = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$

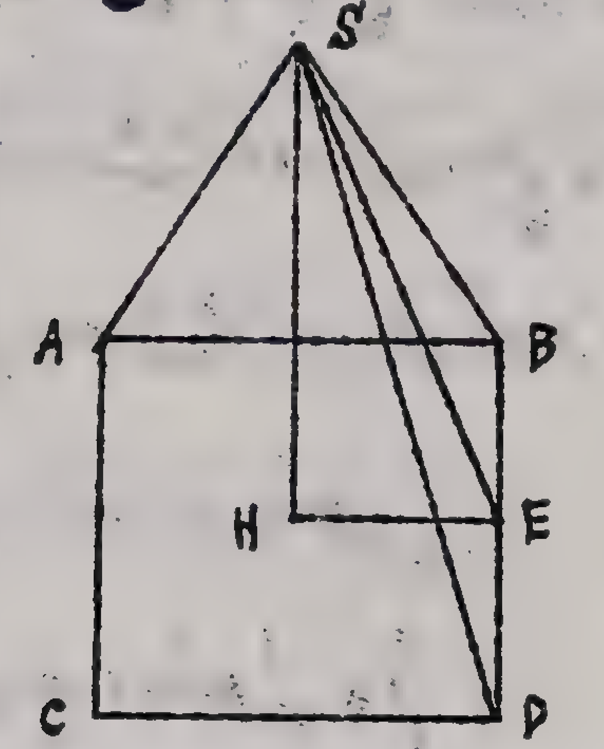
مسئله - منشور قائمی که قاعده آن شش ضلعی منتظمی بضلع a که ارتفاعش h است مفروض است مطلوبست سطح کامل آن

حل - سطح جانبی ۶ مستطیل است بقاعده a و ارتفاع h یعنی $6ah$ سطح دو قاعده منشور چنین میشود $2\left(\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\right)$ یعنی $3a^2\sqrt{3}$ پس سطح کامل منشور عبارتست از $6ah + 3a^2\sqrt{3}$

و یا $3a(2h + a\sqrt{3})$

مسئله - مطلوبست سطح جانبی هرم منتظمی که ارتفاعش h و قاعده اش مربعی به ضلع a میباشد

حل - سطح جانبی عبارتست از ۴ مثلث بقاعده a و ارتفاع SE پس ابتدا طول SE را حساب میکنیم



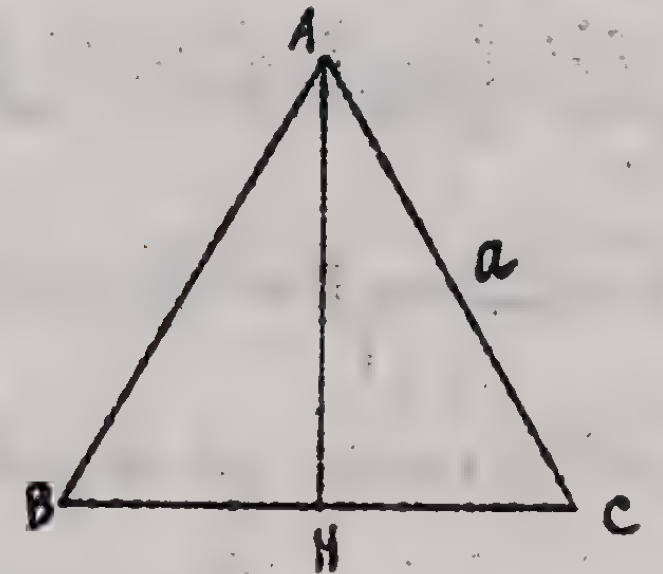
$SE^2 = SH^2 + HE^2$ ولی چون هرم منتظم است پس نقطه H مرکز مربع بوده و $HE = \frac{a}{2}$ است

لذا $SE^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$ پس $SE = \frac{\sqrt{4h^2+a^2}}{2}$ پس سطح یک مثلث جانبی مساویست با $\frac{a}{2} \times \frac{\sqrt{4h^2+a^2}}{2}$ و سطح ۴ مثلث جانبی برابر است با $a\sqrt{4h^2+a^2}$

و چون مساحت مربع قاعده مساویست با a^2 بنابراین دستور سطح جانبی چنین است

$$S = a^2 + a\sqrt{4h^2+a^2} = a(a + \sqrt{4h^2+a^2})$$

مسئله - مثلث متساوی الساقین بضلع a دور حول محور قاعده اش BC دوران میکند مطلوبست حجم حادث



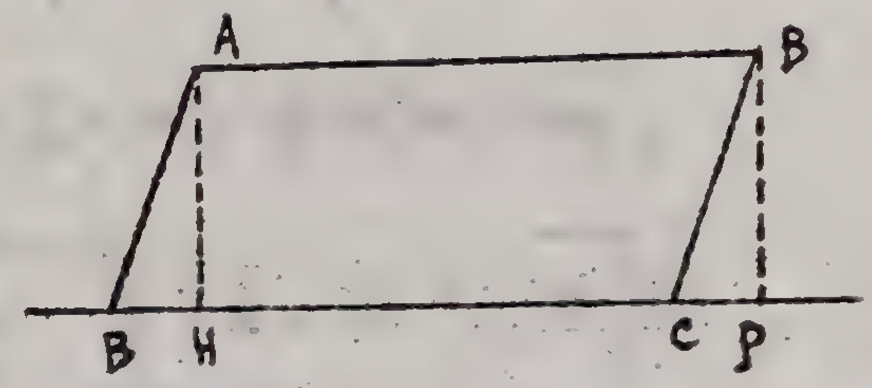
حل - چون مثلث AHC مساویست با مثلث AHB پس حجم حادث از دوران مثلث AHC برابر است با حجم حادث از دوران AHB اما مثلث AHC مخروطی ایجاد میکند که شعاع قاعده اش $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و ارتفاعش $HC = \frac{a}{2}$

است پس حجم این مخروط مساویست با $\frac{a}{6} \times \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$ یعنی $\frac{3\pi a^2}{4} \times \frac{a}{6}$

و چون حجم حادث از دوران مثلث ABC دو برابر اینست لذا $V=\frac{6\pi a^3}{4\times 6}=\frac{\pi a^3}{4}$

مسئله ـ متوازی الاضلاع ABCD در حول محور CD دوران میکند مطلوبست محاسبه حجم حادث از دوران و سطح جانبی آن در صورتیکه $AB=2a$ و $AH=a$ میباشد

حل ـ حجم حادث از دوران متوازی الاضلاع ABCD معادل است با حجم حادث از دوران مستطیل

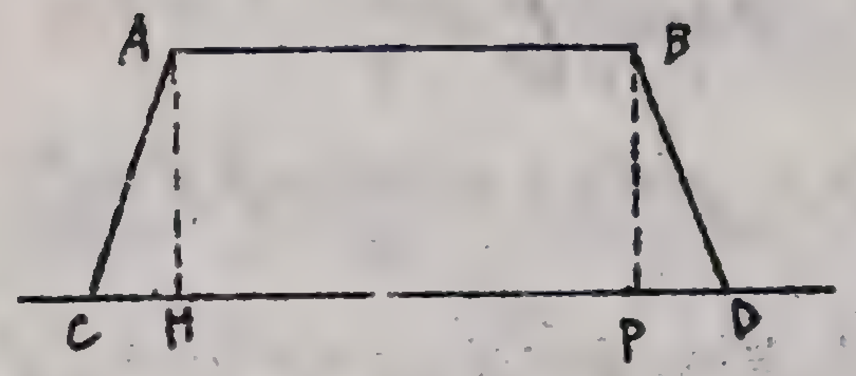


AHBP چه دو مثلث قائم الزاویه AHD و BPC متساویند (دو ضلع و زاویه مقابل بضلع اعظم) پس حجم حادث از دوران مستطیل استوانه ایست که دستور حجم آن چنین است $V=\pi BP^2\times AB$ پس $V=\pi a^2\times 2a$ و از آنجا $V=2\pi a^3$ ثانیاً سطح جانبی استوانه باضافه قاعدتین برابر است با $S=2\pi Rh+2\pi R^2$ پس $S=2\pi a\times 2a+2\pi a^2$ یعنی $S=6\pi a^2$

مسئله ـ ذوذنقه متساوی الساقین ABCD درحول محور CD دوران می کند مطلوبست محاسبه حجم حادث از دوران در صورتیکه $AB=a$ و $CD=2a$ و ارتفاع $AH=h$ میباشد ثانیاً در صورتیکه مقدار $h=3$ و $a=5$ متر باشد حساب کنید

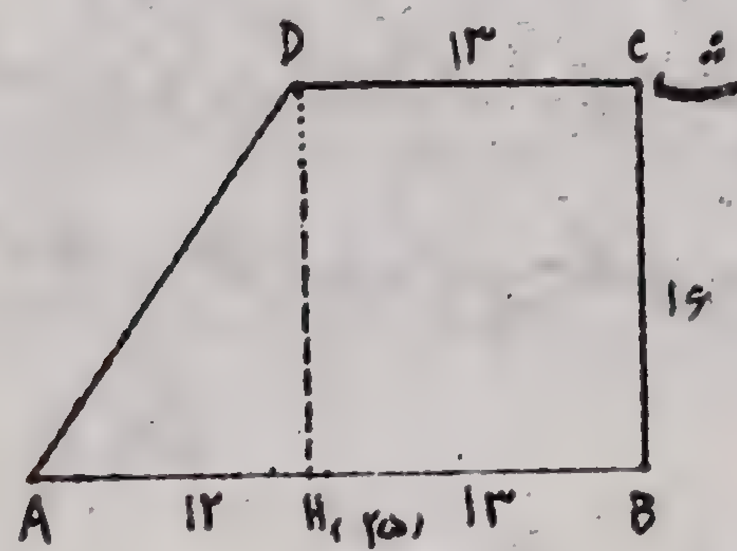
حل ـ از نقاط A و B دو عمود AH و BP را بر CD فرود میآوریم گوئیم حجم حادث از دوران ذوذنقه مفروض برابر است با حجم حادث از دوران مستطیل

AHBP باضافه دو برابر حجم حادث از دوران مثلث قائم الزاویه BPD (زیرا مثلث BPD مساویست با مثلث AHC چون ذوذنقه متساوی الساقین است) اما حجم حادث از دوران مستطیل AHBP استوانه ایست که شعاع قاعده آن $AH=h$ و ارتفاع آن $AB=a$ میباشد



پس دستور حجمش چنین است $V_1=\pi h^2\times a$ و حجم حادث از دوران مثلث BPD مخروطی است که شعاع قاعده اش $BP=h$ و ارتفاعش $PD=\frac{a}{2}$ است پس حجمش میشود $V_2=\pi h^2\times \frac{a}{6}$ پس حجم ذوذنقه چنین است $V=V_1+2V_2=\pi a h^2+2\frac{\pi a h^2}{6}$ و یا $V=\pi a h^2+\frac{\pi a h^2}{3}$ پس $V=\frac{4\pi a h^2}{3}$ حال اگر $h=3$ و $a=5$ باشد $V=\frac{4\pi+5\times 9}{3}$ پس $V=60\pi$

مسئله ـ ذوذنقه ABCD که در زاویه B قائمه است و قاعده $AB=25$ سانتیمتر و $DC=13$ سانتیمتر و ارتفاع $BC=16$ سانتیمتر میباشد درحول AB دوران می کند مطلوبست حجم و سطح جانبی حادث



حل ـ حجم حادث از دوران ذوذنقه ABCD عبارتست از حجم حادث از دوران مستطیل DHCB باضافه حجم حادث از دوران مثلث قائم الزاویه DHA یعنی استوانه باضافه مخروط

حجم اولی مساویست با $\pi BC^2 \times DC$ یعنی $\pi 16^2 \times 13 = 3328\pi$ و حجم مخروط برابر است با $\pi DH^2 \times \frac{AH}{3} = \pi 16^2 \times \frac{12}{3} = 1024\pi$ پس $V = 3328\pi + 1024\pi =$ $V = 4352\pi$ سانتیمتر مکعب اما سطح جانبی استوانه مساویست با $2\pi R h$ و چون سطح یک قاعده نیز در حساب است پس میشود $2\pi R h + \pi R^2$ و سطح جانبی مخروط چون قاعده اش در حساب نیست برابر است با $\pi R \times AD$ پس AD را حساب می کنیم $AD^2 = 12^2 + 16^2 = 400$ پس $AD = 20$ سانتیمتر

پس $S = 2\pi R h + \pi R^2 + \pi R AD = 992\pi$ سانتی متر مربع

مسئله ـ بر دو خط D و D′ خطی متکی کنید که موازات خط مفروض AB باشد

مسئله ـ ثابت کنید که اگر از نقطه M خارج صفحه P خطوط متساوی الطول رسم کنیم تا صفحه را قطع کنند انتهای این خطوط بر روی محیط دایره واقعند (در صورتیکه میل این خطوط نسبت به صفحه ثابت باشد)

مسئله ـ هرگاه دو صفحه متقاطع P و Q با دو صفحه متقاطع P′ و Q′ متوازی باشند فصل مشترک آنها نیز متوازی است

مسئله ـ مطلوبست تعیین مکان هندسی نقاطی که از دو صفحه متقاطع بفاصله معین a باشند

مسئله ـ مطلوبست تعیین نقطه در فضا که از ۳ نقطه فضائی A و B و C بفاصله معین l باشند

مسئله ـ از نقطه O صفحه چنان رسم کنید که فواصل ۳ نقطه A و B و C از این صفحه مساوی باشند

قضیه ـ چه رابطه بین فرجه ای کنج S و زوایای رأس کنج S' آن موجود است

قضیه ـ دو کنج در چه صورت باهم متساویند

مسئله ـ هرمی که قاعده اش مربعی به ضلع a و وجوه جانبی اش مثلثهای متساوی الاضلاع است مفروض میباشد مطلوبست محاسبه سطح جانبی و حجم آن

مسئله ـ مکعب ABCDEFGH به خط الرأس a مفروض است بر FH قطر قاعده فوقانی و رأس A صفحه مرور میدهیم این صفحه هرم AFHE را ایجاد میکند مطلوبست محاسبه حجم این هرم

مسئله ـ هرم منتظمی که قاعده آن ۶ ضلعی منتظم است مفروض است درصورتیکه ضلع قاعده ۱۲ر۱ متر و یکی از خط الرأسهای جانبی آن ۸۰ر۱ متر باشد مطلوبست محاسبه اولاً سطح قاعده ثانیاً سطح جانبی و سطح جانبی کامل و ثالثاً حجم این هرم

مسئله ـ هرم منتظمی که قاعده آن ۶ ضلعی منتظم بضلع a و خط الرأس جانبی هرم $2a$ میباشد مفروض است مطلوبست بحسب a اولاً محاسبه سطح جانبی کامل و ثانیاً حجم این هرم

مسئله ـ هرم منتظمی که قاعده آن مربع محاط در یک دایره بشعاع ۵ سانتیمتر است مفروض میباشد در صورتیکه خط الرأس جانبی آن ۹۲ میلیمتر است مطلوبست

محاسبه حجم این هرم است

مسئله ـ هرم ناقص مربع بقاعده منتظم که ضلع قاعده تحتانی $2a$ و ضلع قاعده فوقانی a و ارتفاعش $2.a$ میباشد مفروض است مطلوبست حجم این هرم

مسئله ـ مطلوبست حجم هرم مثلث القاعده ناقص منتظم که قاعده تحتانی بضلع ۲ متر و ضلع مثلث قاعده فوقانی ۱ متر و ارتفاع برابر ۱۵ متر میباشد

مسئله ـ مستطیلی در حول محوری موازی با طولش دوران می کند مطلوبست حجم حادث از دوران این مستطیل در صورتیکه بدانیم یک ضلع مستطیل برابر h و ضلع دیگر مساوی $2a$ و فاصله مرکز مستطیل از محور دوران مساوی R باشد

مسئله ـ مولد مخروطی مساوی a و ارتفاعش $\frac{12a}{13}$ میباشد مطلوبست محاسبه شعاع قاعده و سطح جانبی و حجم این مخروط بحسب a و در حالت خاصی که $a=52$ سانتی متر است نیز حساب کنید

مسئله ـ شعاع قاعده مخروطی برابر ۳ متر و ارتفاعش ۴ متر مطلوبست اولاً محاسبه طول مولد و ثانیاً سطح جانبی کامل و ثالثاً حجم این مخروط

مسئله ـ مطلوبست محاسبه سطح جانبی کامل و حجم حادث از دوران مربع ABCD بضلع a و مثلث قائم الزاویه CBE در حول محور AE در صورتیکه $a=8$ متر است و $BE=12$ متر

مسئله ـ مطلوبست حجم حادث و سطح جانبی کامل از دوران شکل CAEBD که

مربع ABCD بضلع a و مثلث متساوی الساقین ABE میباشد در حول محور CD

مسئله ـ لوزی ABCD بضلع a که در آن $\hat{A}=60$ درجه میباشد مفروض است مطلوبست اولاً محاسبه اقطار BD و AC و مساحت این لوزی ثانیاً خط غیر مشخص $A\gamma\alpha$ که از رئوس دیگر لوزی نمیگذرد مفروض است از رئوس C و D و B بترتیب عمودهای CG و DE و BH را بر این خط فرود میآوریم ثابت کنید $CG=DE+BH$ ثالثاً لوزی را در حول محور AC دوران میدهیم مطلوبست محاسبه سطح جانبی و حجم حادث از دوران شکل

مسئله ـ مثلث متساوی الاضلاع ABC بضلع $a=5$ متر مفروض است از نقطه D وسط ضلع AB عمود DE را بر قاعده AC فرود میآوریم بعد شکل را در حول محور AC دوران میدهیم مطلوبست محاسبه حجم حادث از دوران شکل DECB :

پایان کتاب

کتبه مرتضی عباجی ۱۳۱۷

[illegible library stamp]

پارهٔ از کتب اختصاصی کتابفروشی تمدن

که از روی آخرین برنامه وزارت فرهنگ تألیف و چاپ شده

۱ـ حساب نوین تألیف آقای نجم آبادی برای سال اول دبیرستانها

۲ـ هندسه نوین جلد اول تألیف آقایان صدیقی و نهاوندی « «

۳ـ « « دوم « « « دوم «

۴ـ جبر و مقابله جلد اول و دوم « آقای رزاقی دوم و سوم «

۵ـ حل المسائل جبر و مقابله « « گلچین « «

۶ـ ۱۰۵ مسئله حساب « « « [illegible] و اول

۷ـ حساب ابتدائی « « ۶،۵،۴ ابتدائی

۸ـ حل المسائل هزار و یک مسئله حساب تألیف آقای بهار « « «

کتاب گلستان

چاپ دوم تصحیح آقای نیکو با شرح اسامی با چاپ و کاغذ مرغوب

ارزش ۸ ریال

حل المسائل هندسه

برای دوره اول دبیرستانها

تالیف

حسین رزاقی لیسانسیه علوم ریاضی

دبیر ریاضیات دبیرستان دارالفنون

دارای مدال درجه اول علمی

چاپ اول

حق چاپ محفوظ است

از انتشارات

کتابفروشی تمدن ـ تهران

۱۳۱۷

چاپخانهٔ آفتاب